

はじめに

本ブックレットは、奈良女子大学附属中等教育学校の5年生(高校2年生)が、学校設定科目「コロキウム」の講座「文化としての数学を」において、探究活動を行った成果をまとめたものである。

奈良女子大学附属中等教育学校は、文部科学省より2005年度～2009年度、2010年度～2014年度の2期に渡りスーパーサイエンスハイスクール(SSH)に指定され、研究を続けてきた。「コロキウム」は、第2期SSHにおける研究の柱の1つとして実践されてきて、2014年度のシラバスには、概要と目標が次のように記載されている。

コロキウムは「21世紀に必要とされる教養とはなにか」をテーマに考えだされた本校独自の学校設定科目である。授業形式は、授業者と選択者の対話による学びの場の形成をめざしている。授業者と選択者の1年間を通しての活動が、教科などの枠を越えた自由な実践へとつながり展開されていくことを期待する。本年は担当教員によって下記の目標に基づいた8講座が展開される。

■コロキウムの目標

- 1) 21世紀に求められる Citizenship (市民的素養) の育成
- 2) “学問の根底にある精神”を中等教育において学ぶ

2015年度は次の8講座が開講され、その中の1講座を高大連携の立場から私が担当した。

物質と社会、健康に生きる、数学と私、科学を通した人間理解
心は動くのか～感情を喚起させる装置の制作～、しあわせ論
「からだ」と「ことば」、文化としての数学を

「文化としての数学を」のカリキュラムは、次ページを見ていただきたい。終盤に各人が興味・関心にしがたって自分でテーマを設定し、探究活動を行った。その結果を論文としてまとめたものが本ブックレットである。生徒は探究した結果を同じ講座の仲間に対してプレゼンテーションし、質疑応答を行い、その経験を活かして探究内容を見なおして論文としてまとめた。それぞれが、少ない時間の中でよく頑張ったと思う。もう少し時間があれば、論文を基にさらに議論を深めることで、よりよい論文ができたであろう。

コロキウムでの学習活動を通じて、出来上がった教科書の数学とは違う文化としての数学を感じ、味わい、理解してくれたとすれば幸いである。なお、講座のテキストは「LADy SCIENCE BOOKLET 1『文化としての数学を』」をご覧ください。

2015年3月27日
奈良女子大学 全学共通教授
吉田信也

■目次

数学は無限をどう扱うか (上松 千陽)	1
円の近似からベルトランの逆説に迫る (北山 翔)	12
奈良の算額 (竹割幸乃)	22
日本列島を襲う大地震と数学～地震予知は可能か?～ (西尾 美都)	30
相対性理論における超光速の物質について (田中 海)	39
和算と円周率 (早崎 真也)	47
折り紙と数学 (赤木 美穂)	56
フィボナッチ数と黄金比 (富永 貴子)	65
統計学的見地から見たイチローと松井秀喜 (延江 一志)	71

※論文の順序は、クラス・出席番号順である

■2014年度 コロキウム 講座「文化としての数学を」カリキュラム

コロキウム「文化としての数学を」		
月	日	内容
4	18	π の歴史
	25	π の歴史
5	2	π を求める
	9	π を求める
	23	確率統計
6	6	確率統計
	13	確率統計
	20	確率統計
7	4	暗号の歴史
	11	暗号の歴史
9	12	暗号の歴史
	26	科学の言葉としての数学「特殊相対性理論」
10	17	科学の言葉としての数学「特殊相対性理論」(ゼミ形式)
	31	科学の言葉としての数学「特殊相対性理論」(ゼミ形式)
11	7	科学の言葉としての数学「特殊相対性理論」(ゼミ形式)
	14	科学の言葉としての数学「特殊相対性理論」(ゼミ形式)
	28	個人・グループでの探究活動
12	12	個人・グループでの探究活動
1	9	個人・グループでの探究活動
	16	個人・グループでの探究活動
	30	個人・グループでの探究活動
2	6	研究発表会
	13	研究発表会
	20	研究発表会
	27	年間のまとめ

数学は無限をどう扱うか

5年A組 上松 千陽

1. 要約

グランディ級数の和と循環小数の値について研究している。グランディ級数については収束や級数の定義から絶対収束、総和法までを学んだ。歴史的にどのような解釈がされてきたかを中心に、現代の数学においてどのように考えられているかを考察した。また、循環小数については無限の種類というものをまず学び、そして現代の数学において考えられている5つの証明について考察した。

キーワード：グランディ級数、収束、無限級数、総和法、無限、極限、循環小数、区間縮小法、デデキント切断

2. 探究の背景と目的

自然数の和 $1+2+3+4+\dots=-\frac{1}{12}$ となるということを知り、「有限の世界」とはまた違った性質をもつ「無限の世界」に興味を持ったが、それを理解するには高度な数学の知識(ゼータ関数や解析接続、オイラー積など)が必要で、2か月間での習得は難しいと考え、似たようなものを調べてみると、 $1-1+1-1+1-1+1-\dots$ という式が3つの答えを持つというパラドックスを持つことを知り、この級数について調べることにした。また、調べていくうちに、無限という集合にも興味を持ち、 $0.999\dots=1$ という式を見つけ、調べることにした。

3. 探究の内容

3-1. $1-1+1-1+1-1+1-\dots$ が持つパラドックス

$$1-1+1-1+1-1+1-\dots \quad (1.1)$$

式(1.1)の和は17世紀ごろから数学者たちの議論的であり、「終わりなき」といわれる深刻な混乱を引き起こした。

次に示す方法で導かれる3つの値があるといわれていた。

①結合法則により

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=0$$

②結合法則により

$$1-(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=1$$

③ $1-1+1-1+1-1+1-\dots=S$ とおく

$$1-(1-1+1-1+1-1+\dots)=1-S \quad (1.1.1)$$

これを展開すると

$$1-1+1-1+1-1+\dots=S \quad (1.1.2)$$

(1.1.1)と(1.1.2)は等しいので

$$1-S=S$$

$$S=\frac{1}{2}$$

①~③は無限までの数の和に有限の数の和について成り立つ性質を適用している。このような「無限に続くもの」を「有限の世界」で考えるという考え方(*)である。BC.4C ごろ発見された取り尽くし法は無限に数を足すということを人間が認識可能な有限の数の集合として考える。(*)は取り尽くし法以降されてきた無限までの数の和の考え方に基づく当時17世紀では一般的な考え方であったと思われる。

さまざまな数学者が式(1.1)について意見を残している。3人の数学者を紹介する。([1]参照)

グランディ(1671~1742)

イタリアの数学者、神学者である彼は1703年

に「式(1.1)の議論における重要な貢献をした」とされる。

(見解) $0, 1, \frac{1}{2}$ も同時に正しい和の値である。

- ・級数(1.1)は和をもたない。
- ・しかしその和は $\frac{1}{2}$ でなければならない。

とし、この事実は世界が 0 から創造されることを証明するものとした。

ライプニッツ(1646~1716)

ドイツの数学者、哲学者である彼は 1713 年の公開書簡の中で自身の意見を明らかにした。

(見解) $\frac{1}{2}$ のみが正しい和の値である。

その論拠は理解しがたいものであり、数学には一般の論理で認められている以上の「形而上学的真理」が存在すると主張した。

ボルツァーノ(1781~1848)

チェコの数学者、哲学者、論理学者、宗教学者である彼は、1848 年の著書『無限の逆説』の中で式(1.1)の和の 3 つの値を紹介している。

式(1.1)は研究していた数学者の名をとって、グランディ級数またはボルツァーノ級数と呼ばれることもある。この論文中ではグランディ級数と呼ぶことにする。

ここで私は、無限に数を足すとはどういうことか、無限に数を足すと必ずその和は出るのか、無限に数を足したものはどんな性質を持っているのか疑問に思った。そこで式(1.1)を理解するために必要な概念を学習した。

3-2 極限と収束

□収束の定義([4]参照)

一般に、数列 $\{a_n\}$ において、 n が限りなく大きくなるにつれて、 a_n が一定の値 α に限りなく近づくと、数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**といい、

α を数列 $\{a_n\}$ の**極限值**という。

この定義は定性的なもので重大な欠点をもつ。

「限りなく」という程度のわからないあいまいな言葉を使い、その極限值が本当に α に近づくのかについても言及されていない。

収束という概念を明確化、精密化したのはフランス人数学者コーシー(1789~1857)とドイツ人数学者ワイエルシュトラス(1815~1897)である。このとき確立された収束の定義は $\varepsilon \cdot N$ 論法とも呼ばれる。

□収束の定義($\varepsilon \cdot N$ 論法)([2]参照)

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α という値に**収束する**とは、任意の正の数 ε に対して、ある番号 N を決めると、 $N \geq n$ をみたす任意の n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となることと定義する。このときと表す。これを論理記号で表すと次のようになる。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$$

$$\text{s.t. } \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

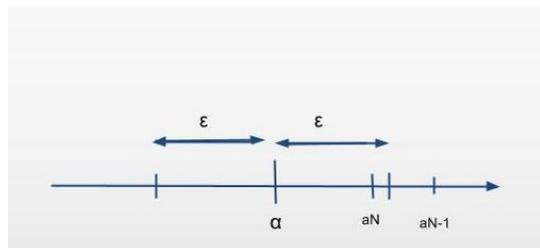


図 1

言い換えると([1]参照)

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に**収束する**とは、正の数 ε をどれだけ小さくとっても、ある番号 N から先のすべての n に対して、 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つことをいう。これを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

と表し、 α を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限值**あるいは単に**極限**と呼ぶ。収束しない数列は**発散する**という。

n	1	10	100	1000	1000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000
an	1	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁴	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	10 ⁻⁷	10 ⁻⁸	10 ⁻⁹	10 ⁻¹⁰
bn	-3	0.122449	0.010202	0.001002	1.00002 × 10 ⁻¹²	1.00002 × 10 ⁻²⁰	1.00002 × 10 ⁻³⁰	1.00002 × 10 ⁻⁴²	1.00002 × 10 ⁻⁵⁶	1.00002 × 10 ⁻⁷²	1.00002 × 10 ⁻⁹⁰
cn	1.00938	0.80577	0.73645	0.69834	0.67321	0.65494	0.64084	0.62948	0.62006	0.61206	0.60515
dn	1.5	0.178847	1.009377	6.588 × 10 ⁹⁰	1.54 × 10 ⁻⁷⁹²	10 ⁻⁷⁹¹⁸	10 ⁻⁷⁹¹⁸¹	10 ^{-10^{5.899}}	10 ^{-10^{7.899}}	10 ^{-10^{7.899}}	error

〔6〕参照

ある大きさ(この場合ε)を示す条件が与えられたとして、収束する値との差がその条件よりも必ず小さくなるようなN番目の数が存在するというのである。

この考え方は収束を定義するだけでなく、どの程度のnでどれほど収束する値αに近づくか(3-2-1)、や収束する値がαではないほかの値に近づくことはない(3-2-2)などという情報を含む

(3-2-1)について

<比較>数列によって収束値に近づく速さに違いはあるのか

a_n, b_n, c_n, d_n に対して n=N となる n(N)を決め、同じ n(N)でどんな大きさのεを満たしているかを比較する。

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{n-2}{n^2-2}$$

$$c_n = \frac{1}{\log(2 + \log(2 + \log n))}$$

$$d_n = \frac{4^n + 5^n}{6^n}$$

とする。(すべて極限値は0)

この比較の結果が表である。表を見ると、第10⁹項目の収束する値との差がd_nは10^{-10^{7.899}}なのに対し、c_nは0.61206とその差は見て明らかである。これは極端な例だが、a_nとb_n、a_nとc_nを比べてみても

表

差ははっきりとわかり、収束する速さに差があることがε-N論法を用いることによってわかった。

(3-2-2)について

例で証明する。

(例) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

[証明]

任意の ε > 0 に対して N を求める。

$$a_n = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ より } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

よって $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ とすればすべての $n \geq N$ で

$$|a_n - 0| < \varepsilon \text{ が成り立つ。} \blacksquare$$

ここで、収束する値αを0ではない実数と仮定する。

任意の ε > 0 に対して N を求める。

$$\left| \frac{1}{n} - \alpha \right| < \varepsilon \text{ より}$$

$$\varepsilon + \alpha < \frac{1}{n} < \varepsilon - \alpha$$

$$\frac{1}{\varepsilon + \alpha} > n > \frac{1}{\varepsilon - \alpha}$$

nはこの範囲以外の値もとりうるのでこの等式を満たすn ≥ Nとなるnは存在しない。よってαは0ではない実数に収束するという仮定は成り立たない。■

□発散、振動

収束しない級数は**発散する**という。

数列{a_n}_{n=1}[∞]が**+∞に発散する**とは、正の数

M をどれだけ大きくとっても、ある番号 N から先のすべての n に対して

$$a_n < M$$

が成り立つことをいう。これを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

と表す。数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $-\infty$ に発散するとは、

正の数 M をどれだけ大きくとっても、ある番号 N から先のすべての n に対して

$$a_n < -M$$

が成り立つことをいう。これを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

と表す。なお、 $+\infty$ の + 記号は省略することもある。

収束せず、正の無限大にも負の無限大にも発散しない数列を **振動する** 数列という。

3-3 無限級数

□無限級数

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ をこの順に加法の記号 + でつないだものを **(無限)級数** といって、

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (3.3)$$

または

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ または } \sum a_n \quad (3.3.1)$$

と書く。級数(3.3)において

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

をこの級数の **第 n 項部分和** という。ここで、部分和の列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots \quad (3.2)$$

が収束するとき、級数(3.3)は収束するといひ、その極限値を級数の **和** と呼ぶ。級数の和も級数と同じ記号(3.3)または(3.3.1)で表

す。すなわち、(3.3.2)の極限を S と書けば

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

(3.3.2)が収束しないとき、級数は**発散する** という。

□絶対収束

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の各項をその絶対値で置き換

えてできる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき、

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は **絶対収束する** という。絶対収束する級数は和をもつ。

定理(ディリクレの定理)

絶対収束する級数は、項の順序をどのように入れ替えても同じ値に収束する。

[証明]([1]参照)

級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ を絶対収束する級数とし、その和を α とおく。いま、自然数の順序を任意に入れ替えたものを n_1, n_2, n_3, \cdots とし、 $b_k = a_{n_k}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) とおくと、級数 $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ はもとの級数の項の順序を任意に入れ替えて得られる級数である。級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ が絶対収束することから、どれだけ小さな ε に対しても、自然数 N を大きくとると、

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$$

が成り立つ。このような N を 1 つ固定し、 $A = \{k \in \mathbb{N} | n_k \leq N\}, = \max A$ とおくと、 $K \geq K_0$ のとき

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^K b_k - \alpha \right| &\leq \left| \sum_{k \in A} b_k - \alpha \right| + \left| \sum_{k \in \{1, \dots, k\} \setminus A} b_k \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^N a_n - \alpha \right| + \left| \sum_{k \in \{1, \dots, k\} \setminus A} b_k \right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| + \sum_{k \in \{1, \dots, k\} \setminus A} |b_k| \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| + \sum_{k \in \{1, \dots, k\} \setminus A} |a_{n_k}| \\
&\leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < 2 \varepsilon
\end{aligned}$$

2ε はいくらでも小さくとれるから級数 $\sum b_n$ は収束し、和は α に等しい。■

□条件収束

収束するが絶対収束しない無限級数は**条件収束する**という。級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が条件収束するとき、数列 $\{a_n\}$ の中から正の項だけを取り出して順に並べてできる級数を $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ とし、負の項だけを取り出して順に並べて出来る級数を $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ とおくと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = -\infty \quad (3.3.3)$$

が成立する。なぜなら、もし $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ も有限の和をもつとすると、級数が絶対収束することになり、仮定に反する。また、一方だけが有限の和をもつとすると、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が $+\infty$ または $-\infty$ に発散することになり、これも仮定に反するからである。

定理(リーマン)

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が条件収束するとする。このとき、この級数の項を並び替えてできる級数の和が、任意に与えられた実数に一致するようにできる。

[証明]([1]参照)

α を勝手な実数とする。数列 $\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ を (3.3.3) に現れる数列とし、自然数の列 $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ と $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ を以下の手順で定める。まず m_1, n_1 を次式で定義する。

$$m_1 = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \sum_{j=1}^m b_j < \alpha\},$$

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{j=1}^n b_j + \sum_{j=1}^n c_j < \alpha\}$$

次に m_1, m_2, \dots, m_k および n_1, n_2, \dots, n_k までが定まったとして、 m_{k+1}, n_{k+1} を次式で定める。

$$m_{k+1} = \min\left\{m \in \mathbb{N} \mid \sum_{j=1}^{m_k} b_j + \sum_{j=1}^{m_k} c_j +$$

$$\sum_{j=m_{k+1}}^m c_j > \alpha\right\}$$

$$n_{k+1} = \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{j=1}^{m_{k+1}} b_j + \sum_{j=1}^{m_{k+1}} c_j +$$

$$\sum_{j=n_{k+1}}^n c_j > \alpha\right\}$$

こうして帰納的に自然数の列 $m_1 < m_2 < m_3 < \dots, n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ が定まる。このとき級数

$$b_1 + \dots + b_{m_1} + c_1 + \dots + c_{n_1} + b_{m_1+1} + \dots + b_{m_2} + c_{n_1+1} + \dots$$

は元の級数の項を並び替えた形になっており、その部分和は、 α のまわりを振動する。より正確には、この級数の第 N 部分和を S_N とおくと、

$$\begin{aligned}
m_1 + n_1 + \dots + m_j + n_j &\leq N \\
&< m_1 + n_1 + \dots + m_{j+1} \\
&\quad + n_{j+1} \\
\Rightarrow \alpha + c_{n_j} &\leq S_n \leq \alpha + b_{m_{j+1}}
\end{aligned}$$

が成り立つ。しかるに $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束級数ゆ

え $b_n \rightarrow 0, c_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$
よって上の級数は収束し、和は α に等しい。

■

3-4 現代の数学における解釈

3-4-1 定義に基づく解釈

3-3の無限級数の収束、発散の定義に基づいて考える。式(1.1)の部分 and を S_n とおくと数列 $\{S_n\}$ は

1,0,1,0,1,0,1,0...

となり、収束せず、振動する数列であるとわかる。よって式(1.1)に和は存在しない(不定)。

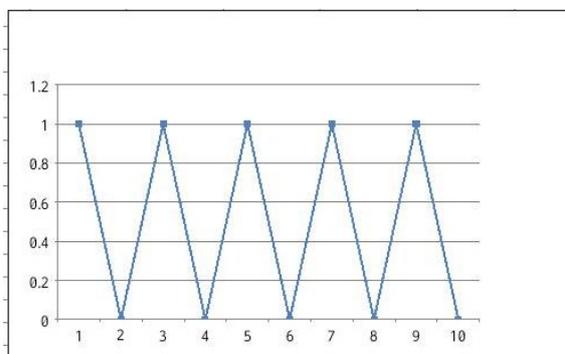


図 2

3-4-2 級数の操作は許されるか

3.1では式(1.1)の和を当時17世紀に考えられていた有限の性質を用いて求める方法をみた。ここでは、19世紀以降に確立された3-2、3-3でみたような概念を用いて①~③の和を求める操作について是非を論じることができる。

$$\textcircled{1} (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=0$$

$$\textcircled{2} 1-(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=1$$

これらは畳み込み級数のように扱っている。

□畳み込み級数

各項からその近くの後続または先行する項と打ち消しあう部分を取り出して次々に項が消えていくことで和が求められる級数

ここで行われる計算する順序の変更(つまり項の並び替え)は絶対収束しない限りは無効である。(*1)より式(1.1)は絶対収束しないので畳み込み級数として扱うことはできない。

$$(*1) 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\dots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ とおく}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1+1+1+1+1+1+1+1+\dots=\infty$$

$$\textcircled{3} 1-S=1-(1-1+1-1+1-1+1-1+\dots)=S \text{ より } S=\frac{1}{2}$$

無限級数の和は部分和の列に極限值がある場合でのみ定義され、式(1.1)は部分和を考えたときに $S(2n)=0, S(2n-1)=1$ となるため、和があることを前提に $=S$ とはおけない。

3-4-3 総和法

19世紀にコーシーが収束の概念を確立し、式(1.1)は和をもたないことが明らかになった。コーシーは和が何になるかという観点からではなく、和をもつかどうかという観点から考え、収束の概念を生み出した。しかし、それ以降もっと別の観点から考えようとする試みがされ、できたのが総和法と

いう考え方である。グランディ級数はチェザロ総和法を用いると和を意味のある値として求めることができる。

□チェザロ総和法 (チェザロ和)

無限階級に「和」と呼ばれる値を結びつける総和法の一種。無限級数が通常の意味で収束して値を持つならば、同じ値をチェザロ和として持つ。収束しない級数の中にもチェザロ和が矛盾なく定義できるものがある。

数列 $\{a_n\}$ の第 k 部分和を

$$S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sum_{i=0}^k a_i$$

となる。ここで、極限

$$A: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i$$

が有限確定であるとき、数列 $\{a_n\}$ は**チェザロ総和可能**あるいは**チェザロの意味で総和可能**であるといい、極限の値 A を数列 $\{a_n\}$ あるいは級数 $\sum a_n$ の**チェザロ和**あるいは**チェザロの意味での和**という。

グランディ級数におけるチェザロ和を考える。

式(1.1)の部分 and を S_n とおくと数列 $\{S_n\}$ は $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

数列 $\left\{\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}\right\}$ の各項は

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \dots$$

となる。極限値を求める。

(i) $S_n=1$ のとき

$$\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$$

(ii) $S_n=0$ のとき

$$\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(i)(ii) \text{より } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \frac{1}{2}$$

ゆえに式(1.1)のチェザロ和は $\frac{1}{2}$ である。

3-5 循環小数のパラドックス

0.9999...

は循環小数であり、

$$0.\dot{9} \quad 0.\overline{9} \quad 0.\underline{9}$$

とも表すことができる。そして式(0)が実数を表すものならば、

$$0.9999\dots = 1$$

が成り立つ。

□可能無限([11]参照)

無限を把握できるのは限りがないということを確認する操作が存在しているということだけで、無限全体というものは認識できないとする立場。無限小や無限大の概念を含むのはこちらの立場である。

□実無限([11]参照)

無限の対象の全体性を把握して、無限が実際に存在しているとする立場。この立場では無限を集合として扱い、いくつもの無限(可算集合、不可算集合など)が存在するとする。カントールの集合論で扱われている無限はこちらの立場である。

可能無限の立場から見ると、

0.999…の「…」は「以下同様どこまででも続く」という意味のみで0.999…は果てしなく1に近づくが決して1には到達しないと考える。

実無限の立場から見ると、

0.999…の「…」は「以下同様どこまででも続く」という意味だけでなく、「そして、どこまでも終わらない永遠の彼方にまで到達してしまっただとする」という意味も含む。このとき、0.999…は1と等しいと考える。

今回は「実数を表す」としているので、実無限で考えている。以下は実無限で考えたときに0.999…=1が成り立つことを証明する。

3-6 証明

3-6-1 桁の操作

(1) 分数を使った証明

[証明]

0.3333…を分数に直すと、 $\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} = 0.3333 \dots$$

$$\frac{1}{3} \times 3 = 0.3333 \dots \times 3$$

よって $1 = 0.9999 \dots$ ■

または

0.1111…を分数に直すと、 $\frac{1}{9}$

$$\frac{1}{9} = 0.1111 \dots$$

$$\frac{1}{9} \times 9 = 0.1111 \dots \times 9$$

よって $1 = 0.9999 \dots$ ■

(2) 代数的な証明

[証明]

$x = 0.9999 \dots$ とすると、

$$10x = 9.9999 \dots$$

$$\cdot) \quad x = 0.9999 \dots$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

よって $1 = 0.9999 \dots$ ■

3-6-2 級数、極限と考えて証明する

(1) 級数による証明

□無限等比級数

初項 a 、公比 r の無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ から作られた無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad (0)$$

を初項 a 、公比 r の無限等比級数という。

$a = 0$ のとき(0)は0に収束する。

以下は $a \neq 0$ のときを考える

部分和 S_n を考えると

$$r \neq 1 \text{ のときは } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$r = 1$ のときは $S_n = na$

(i) $|r| < 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

よって、この無限級数は収束し、その和は $\frac{a}{1-r}$ である。

(ii) $r = 1$ のとき

$S_n = na$ で $a \neq 0$ であるから、この無限級数は発散する

(iii) $r \leq -1$ または $1 < r$ のとき

数列 $\{r^n\}$ は発散するから、 $\{S_n\}$ も発散する。

よって、この無限級数は発散する。

[証明]

$$0.9999\cdots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots$$

これは初項 0.9、公比 0.1 の無限等比級数である。したがって

$$0.9999\cdots = \frac{0.9}{1-0.1} = 1$$

よって $1 = 0.9999\cdots$ ■

(2)極限による証明

[証明]

ε -N論法を用いて定義した極限の概念を使う。

$$0.999\cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{999 \dots 9}_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n}$$

$$= 1$$

よって、 $0.999\cdots = 1$ ■

これは $0.999\cdots$ が 1 に限りなく近づくということを表すものではなく、 $0.999\cdots$ は 1 に等しいということを表すものである。

3-6-3 区間縮小法を用いた証明

□区間縮小法([12]参照)

I_n が閉区間であり、 $\{I_n\}$ が $I_n \supset I_{n+1}$ (

真部分集合)を満たす区間列であるとする。このとき、 I_n の長さが 0 に収束するならば、すべての区間に含まれるただ 1 つの点 c が存在する。

$$I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap \dots = \{c\}$$

また、これを幾何学的に考える。

区間とは線分の長さであり、線分は点の無限集合、閉区間は両端を含む区間である。区間列による表現としての区間縮小法の幾何学的な意味は「線分の長さを 0 に無限に近づける場合、それらの線分に含まれる共通の点がただ 1 つ存在する」ということである。

ある実数 x が閉区間 $[b_0, b_0 + 1]$ に属する時、一の位は「 b_0 」と表される。 $[b_0, b_0 + 1]$ をさらに縮小して、 $[b_0, b_1, b_0, b_1 + 0.1]$ に属する時、小数第一位までを「 b_0, b_1 」と表す。この操作を区間の幅が 0 になるまで繰り返すと、 $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$ という無限数列による縮小区間の無限列ができる。この数列から、 $x = b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$ と表現される。

[証明]

これに基づいて実数 1 の表記を考える。実数 1 は閉区間 $[0, 1]$ と閉区間 $[1, 2]$ にいずれにも属する。

1 が閉区間 $[0, 1]$ に属する時、

$$1 = 0.999\cdots$$

と表現できる。

また、1 が閉区間 $[1, 2]$ に属する時、

$$1 = 1.000\cdots$$

と表現できる。

よって、 $0.999\cdots = 1$ ■

3-6-4 実数の構成を考えて証明する

(1)デデキント切断による証明

□デデキント切断([7]参照)

数の集合 K を次の条件を満たす 2 つの集合 A, B に分類する。

(i) $K=A \cup B, A \cap B = \emptyset$

(ii) $a \in A, b \in B \Rightarrow a < b$

このとき、2つの集合の組(A,B)をKのデデキント切断という。

([8]参照)

また、有理数の集合Qを次のように(A,A')に分割するとき(A,A')を有理数の切断と呼ぶ。(Aを上組、A'を下組という)

(i) $Q= A \cup A'$

(ii) $a \in A, a' \in A' \Rightarrow a < a'$

(iii) Aには最大値がない

A'に最小値がある場合、切断は有理数を定め、ない場合は無理数を定める。

つまり、有理数のみを用いて実数を定義することができる。

上記の定義により、任意の実数xは「xより小さい有理数全体からなる無限集合」と定義される。ある実数xが無理数であってもその小数展開表示を適当な桁までで切って得られる有理数を使って、それより小さい有理数の集合を考えればよい。

[証明 1]

デデキント切断による実数の定義により、実数1は「1より小さいすべての有理数の集合」、実数0.999...は「0.999...より小さいすべての有理数の集合」となる。

0.999...が「1より小さい数のうち最も大きな無理数」なのであれば、「1より小さいすべての有理数の集合」と「0.999...より小さいすべての有理数の集合」はまったく同じものと考えられる。

よって、 $0.999...=1$ ■

[証明 2]

0.999...を小数展開表示して得られる有理数Rは

$$R=1-\left(\frac{1}{10}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

すべてのRは実数0.999...の元である。一方、実数1の元となる任意の有理数rを考える。

$$r=\frac{a}{b} < 1$$

$b \geq 1$ を考えると、

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{b-a}{b} \leq 1 - \frac{1}{b} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^b$$

となるため、 $\frac{a}{b}$ は0.999...の元になっている。よって、実数0.999...は実数1とまったく同じ有理数をすべて元として含み、これらは集合として等しい。

よって、 $0.999...=1$ ■

4. 今後の課題

身近で単純に見える式を数学的に理論立てて考えてみると、その奥には深く複雑な論理が潜んでいる。これがこの研究テーマの魅力だと私は思う。その分、ある程度の解析学の知識や集合論の知識が必要だが、時間がなかったこともあり、あまり深くまで調べたうえで考察することができなかった。また、証明がたくさんあり、自身で考察することができたものもあるが、読んで理解することしかできなかったものもあった。グランディ級数は交代級数という性質も持っており、そういう観点からも調べてみたい。また、今回はあまり触れられなかった収束条件など実数列の収束についてさらに調べ、その上で他の興味深い無限級数について考えてみたいと思う。

5. 参考文献

[1]現代解析学への誘い、俣野博、岩波書店

[2]なっとくする無限の話、玉野研一、講談社

[3]現代解析の基礎—直感から論理へ— 論理から直感へ—、荷見守助・堀内利郎共著、内田老鶴圃

[4] 数学Ⅲ、俣野博・河野俊丈ほか 27 名、東京書籍

[5]JSciencer/ ϵ - N 論法

<http://jsciencer.com/unimath/bisekibun/1952/>

[6] ϵ - δ 論法と算術化

<http://blue.ap.teacup.com/qmss/2638.html>

[7]デデキント切断

<http://homepage3.nifty.com/rieki-index01/biseki/dedekind.html>

[8]デデキントの実数論

http://mail2.nara-edu.ac.jp/~asait/pythagorean/section5/pyta_section5.htm

[9]無限は実在するか

<http://sets.cocolog-nifty.com/blog/071.html>

[10]ウィキペディア

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%A1%E3%82%A4%E3%83%B3%E3%83%9A%E3%83%BC%E3%82%B8>

[11]実無限と可能無限

<http://blog.livedoor.jp/khideaki/archives/50464188.html>

[12]区間縮小法

<http://park20.wakwak.com/~ichikawa-clinic/2-diminish.htm>

円の近似からベルトランの逆説に迫る

5年A組 北山 翔

1. 概要

「半径 r の円（以下、本論文において単に「円」と表記されている場合はこれを指すものとする）における弦を一本無作為に選び、その長さが $\sqrt{3}r$ より長くなる確率はいくらか。」

（命題 1）

ジョセフ・ベルトランが自身の著作で確率変数を導入する方法やメカニズムが明確に定義されない場合、確率がうまく定義できない場合があることを示す例として与えたものである。確率論の古典的解釈において発生するこの問題を、ベルトランの逆説という。

2. 探究の背景と目的

この問いには、古典的に主に 3 種類の回答が存在し、最終的には異なる 3 通りの確率が導き出されるが、これは問いの「無作為に」をどのように解釈するかによる違いであり、これら 3 つの答えは全て正しいとされている。本論文においては、既存のものとは別の、独自の方法でこの問いに迫っていくことを目的とする。

3. 探究の内容

3.1 古典的解答

3.1.1 「無作為な端点」方式

円周上の 2 点を無作為に選び、それらを結ぶ弦を考える。選んだ端点の一方に正三角形の頂点の一つを一致させたとき、もう一つの端点が、正三角形の残りの 2 点を結ぶ劣弧上に存在するとき、弦の長さが正三角形の一辺の長さ、すなわち $\sqrt{3}r$ を超える。この劣弧の長さは円周の 3 分の 1 であるから、求める確率は 3 分の 1 である。（図 1 参照）

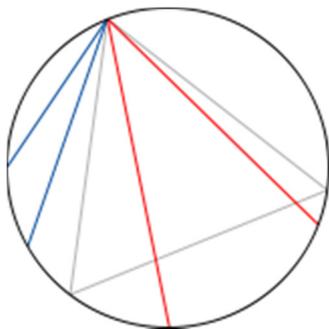
3.1.2 「無作為な半径」方式

円の半径を 1 本無作為に選び、更にもその上の点を 1 個無作為に選ぶ。この点を通り、選んだ半径に垂直な弦を考える。1 辺がこの弦に垂直になるように正

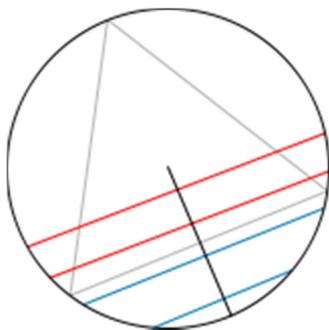
三角形を配置したとき、この点が正三角形の内側に存在すれば、弦は正三角形の一辺の長さ、すなわち $\sqrt{3}r$ を超える。半径に交わる正三角形の一辺はこれを垂直に二等分するから、求める確率は2分の1である。(図2参照)

3.1.3 「無作為な中点」方式

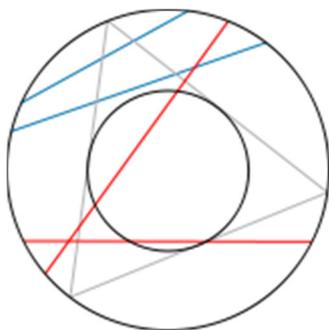
円の内部の点を1つ無作為に選び、これを中点とする弦を考える。円と同心かつ半径がその半分であるような円を考えたとき、選んだ点がこの円の内部に存在するとき、弦は正三角形の一辺の長さ、すなわち $\sqrt{3}r$ を超える。この円は元の円の4分の1の面積であるから、求める確率は4分の1である。(図3参照)



(図1) 「無作為な端点」方式
青色の弦は正三角形の一辺よりも短く、赤色の弦はそれよりも長い



(図2) 「無作為な半径」方式
青い弦は正三角形の一辺よりも短く、赤い弦はそれよりも長い



(図3) 「無作為な中点」方式
青い弦は正三角形の一辺よりも短く、赤い弦はそれよりも長い

3.2 新しい方法の提案

「半径 r の円に内接する正 n 角形($n=4,5,6,\dots$)の全ての対角線から 1 本を無作為に選んだ場合、それが $\sqrt{3}r$ より長い確率(以後 $P(n)$ とする)」を求める。半径 r の円を、半径 r の円に内接する正 ∞ 角形と考えれば、本間における弦が対角線に相当すると考えられる。

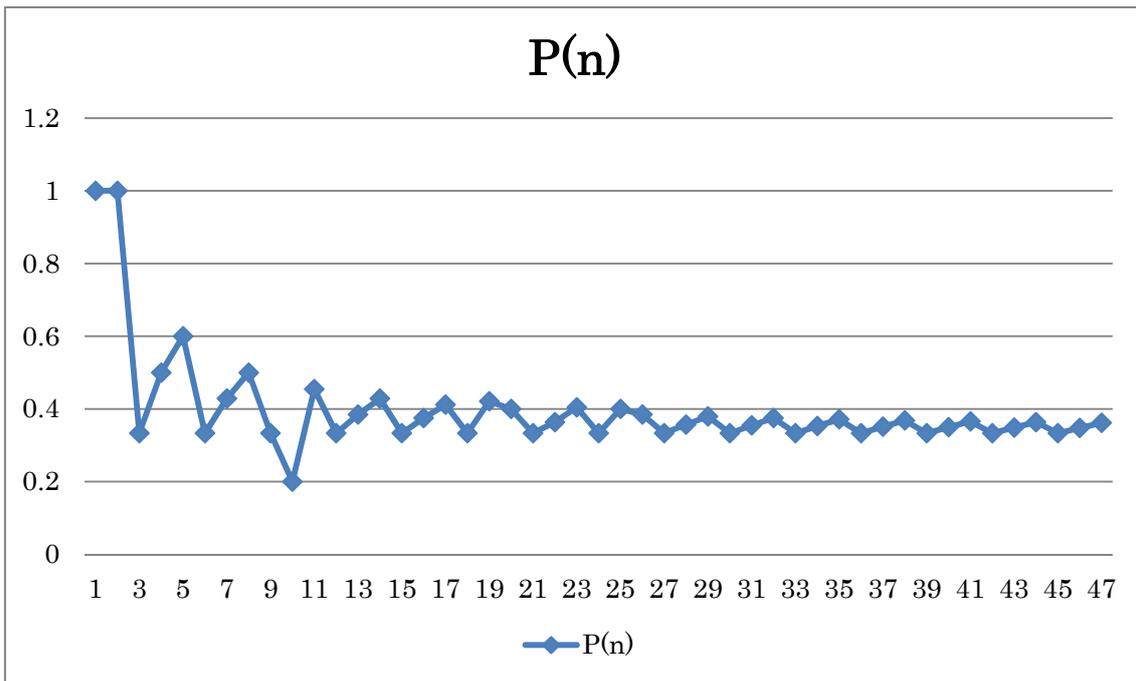
そこで、半径 r の円に内接する正方形、正五角形、正六角形、...において $P(n)$ を求め、 $P(n)$ の推移をグラフとして描写することで漸近線のようなものが出現、正 ∞ 角形の場合が求まると予想した。

3.3 結果、考察

$n=4$ から 50 までの $P(n)$ を求め、表にしたものが次に示す表 1 である。また、横軸に $n-3$ 、縦軸に $P(n)$ をとり、グラフにしたものが次に示すグラフ 1 である。

n	P(n)	n	P(n)	n	P(n)
4	1	20	0.411765	36	0.333333
5	1	21	0.333333	37	0.352941
6	0.333333	22	0.421053	38	0.371429
7	0.5	23	0.4	39	0.333333
8	0.6	24	0.333333	40	0.351351
9	0.333333	25	0.363636	41	0.368421
10	0.428571	26	0.404682	42	0.333333
11	0.5	27	0.333333	43	0.35
12	0.333333	28	0.4	44	0.365854
13	0.2	29	0.384615	45	0.333333
14	0.454545	30	0.333333	46	0.348837
15	0.333333	31	0.357143	47	0.363636
16	0.384615	32	0.37931	48	0.333333
17	0.428571	33	0.333333	49	0.347826
18	0.333333	34	0.354839	50	0.361702
19	0.375	35	0.375		

(表 1)



(グラフ 1) 縦軸が $P(n)$ 、横軸は $n-3$ となっている

表 1 から、 n が 3 の倍数であるときに $P(n)$ は $1/3$ となっている事が分かる。また、グラフからは、 n が 3 の倍数以外の時も $P(n)$ は徐々に $1/3$ に近づいている事が分かる。これらより、 $P(n)$ は $1/3$ に収束するという仮説が立てられる。

$P(n)$ は $1/3$ に収束する (仮説 1)

3.4 考え方

3.4.1 対角線の表記法

ここで、例えば $n=11$ の場合について考える。正 11 角形の任意の頂点を 1 とし、反時計回りに、2,3,4,...と、各頂点に番号をつける。例えば頂点 1 から頂点 3 に引いた対角線は、

「1 個飛ばしの対角線」

もしくは

「L(1→3)」

と表す。ただし、 $L(\alpha \rightarrow \beta)$ が γ 個飛ばしの対角線であるとき、

$$\gamma = \beta - \alpha - 1$$

と定義するため、先述の例の場合、4個飛ばしの対角線と5個飛ばしの対角線は同じ対角線である。また、 $L(10 \rightarrow 1)$ といった表記はせず、 $L(10 \rightarrow 12)$ とする。

3.4.2 対角線の長さの判定

例えば $n=12$ の場合、3個飛ばしの対角線を、 $L(1 \rightarrow 5)$ 、 $L(5 \rightarrow 9)$ 、 $L(9 \rightarrow 13)$ のように3本が繋がるように引くと正三角形が出現する。円に内接する正三角形の一辺の長さは $\sqrt{3}r$ なので(証明略)、この3個飛ばしの対角線の長さは $\sqrt{3}r$ である。従って、4個飛ばしの対角線以降、その長さは $\sqrt{3}r$ を超える。

3.4.3 初めて $\sqrt{3}r$ を超える「 m 個飛ばし」の一般化

証明にあたり、様々なものを一般化する必要がある。そこで、正 n 角形において、何個飛ばしの対角線が初めて $\sqrt{3}r$ を超えるのかを考える。

正 n 角形における $L(\alpha \rightarrow \beta)$ が γ 個飛ばしであるとき、

$$\beta = \alpha + \gamma - 1$$

であることから、頂点1から $m(m \in \mathbb{N})$ 個飛ばしで引いた対角線が3本繋げて引かれたとき、終着点が $n+1$ より大きくなる最小の m を求めれば良い。

$$\therefore 1+m+1+m+1+m+1 > n+1$$

これを解いて、

$$m > \frac{n-3}{3} \quad (\text{式 1})$$

これを満たす最小の m を $n(n=4,5,6,\dots)$ について調べると、下の表2のようになり、 $n=3k, 3k+1, 3k+2(k=2,3,4,\dots)$ で、 $m=k$ になると予想できる。

n	m	n	m	n	m
4	1	20	6	36	12
5	1	21	7	37	12
6	2	22	7	38	12
7	2	23	7	39	13
8	2	24	8	40	13
9	3	25	8	41	13
10	3	26	8	42	14
11	3	27	9	43	14
12	4	28	9	44	14
13	4	29	9	45	15
14	4	30	10	46	15
15	5	31	10	47	15
16	5	32	10	48	16
17	5	33	11	49	16
18	6	34	11	50	16
19	6	35	11		

(表 2)

(証明)

$n=3k$ のとき、式 1 にこれを代入し、

$$m > \frac{3k-3}{3}$$

$$m > k - 1 \quad (\text{式 2})$$

$n=3k+1, 3k+2$ のときも同様にして、

$$m > k - \frac{2}{3} \quad (\text{式 3})$$

$$m > k - \frac{1}{3} \quad (\text{式 4})$$

以上、(式 2,3,4)より、これを満たす最小の m はいずれも k となる。(証明終わり)

よってこの証明より、

半径 r の円に内接する正 $3k$ 角形、正 $3k+1$ 角形、正 $3k+2$ 角形において、その長さが初めて $\sqrt{3}r$ を超える対角線は、 k 個飛ばしである。($k=2,3,4,\dots$) (定理 1)

よってまずは n を $3k, 3k+1, 3k+2$ に場合分けして考える事とする。

3.4.4 n の偶奇による場合分けの必要性

正 n 角形において、 $n=2n'$ のときも、 $n=2n'+1$ のときも ($n'=2,3,4,\dots$)、 $\sqrt{3}r$ を超える最長の対角線は $n'-1$ 本飛ばしである (これは $n=2n'$ のとき直径と等しく、 $n=2n'+1$ のとき最も直径の長さに近い対角線である)。 $n=2n'+1$ のとき、どの対角線も重複無く $2n'+1$ 本存在するが、 $n=2n'$ のとき、 $n'-1$ 本飛ばしの対角線に重複が生じ、そのみ $\frac{2n'}{2}=n'$ 本となる ($\because n'-1$ 本飛ばしの対角線は円の直径と一致するものである)。このため両者では $\sqrt{3}r$ を超える対角線の本数に違いが生じる。したがって n の偶奇による場合分けが必要なのである。

円に内接する正 $2n', 2n'+1$ 角形 ($n'=2,3,4,\dots$) において、その長さが $\sqrt{3}r$ を超える最長の対角線は、 $n'-1$ 本飛ばしである。 (定理 2)

これと 3.4.3 より、(仮説 1) の証明では、 n を $3k$ と $3k+1$ と $3k+2$ 、更にそれぞれを偶奇で場合分けし、計 6 パターンについて証明を行う。

3.5 証明

円に内接する正 n 角形 ($n=3,4,5,\dots$) について、無作為に選んだ 1 本の対角線の長さが $\sqrt{3}r$ を超える確率 $P(n)$ を求める。ただし $n=3$ のとき、対角線は 0 本存在すると考えるものとする。

I. $n=3k$ のとき

(甲) $3k$ が偶数すなわち $k=2l$ (以後、 $l \in \mathbb{N}$) のとき

$$n=3 \times 2l=6l$$

(定理 1) より、初めてその長さが $\sqrt{3}r$ を超えるの対角線は $2l$ 個飛ばしである。

また、(定理 2) より、その長さが $\sqrt{3}r$ を超える最長の対角線は $3l-1$ 個飛ばしである。

従って、その長さが $\sqrt{3}r$ を超える対角線は

$$3l-1-2l+1=1 \text{ 本である。}$$

$n=3k$ が偶数であることに注意してその長さが $\sqrt{3}r$ を超える対角線の総数を求めると、

$$(l-1)6l+3l=6l^2-3l$$

本となる。

一方、対角線の総数は

$$\frac{6l(6l-3)}{2}=18l^2-9l$$

本である。

従って求める確率は、

$$P(n)=\frac{6l^2-3l}{18l^2-9l}$$

ここで1を無限大に飛ばすと、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{6l^2 - 3l}{18l^2 - 9l} = \frac{1}{3}$$

(乙) $3k$ が奇数すなわち $k=2l-1$ のとき

$$n = 3(2l - 1) = 6l - 3$$

同様に、求める対角線は $2l-1$ 個飛ばしから $3l-3$ 個飛ばしまでの計 $l-1$ 本であり、 $n=3k$ が奇数であることに注意してその総数を求めると、

$$(l-1)(6l-3) = 6l^2 - 9l + 3$$

本となる。

一方、対角線の総数は、

$$\frac{(6l-3)(6l-6)}{2} = 18l^2 - 27l + 9$$

従って求める確率は、

$$P(n) = \frac{6l^2 - 9l + 3}{18l^2 - 27l + 9}$$

ここで1を無限大に飛ばすと、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{6l^2 - 9l + 3}{18l^2 - 27l + 9} = \frac{1}{3}$$

II. $n=3k+1$ のとき

(甲) $3k+1$ が偶数すなわち $k=2l-1$ のとき

$$n = 3(2l - 1) + 1 = 6l - 2$$

同様に、求める対角線は $2l-1$ 個飛ばしから $3l-2$ 個飛ばしまでの計 l 本であり、 $n=3k+1$ が偶数であることに注意してその総数を求めると、

$$(l-1)(6l-2) + 3l - 1 = 6l^2 - 5l + 1$$

本となる。

一方、対角線の総数は、

$$\frac{(6l-2)(6l-5)}{2} = 18l^2 - 21l + 5$$

従って求める確率は、

$$P(n) = \frac{6l^2 - 5l + 1}{18l^2 - 21l + 5}$$

ここで1を無限大に飛ばすと、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{6l^2 - 5l + 1}{18l^2 - 21l + 5} = \frac{1}{3}$$

(乙) $3k+1$ が奇数すなわち $k=2l$ のとき

$$n = 3 \times 2l + 1 = 6l + 1$$

同様にして、求める対角線は $2l$ 個飛ばしから $3l-1$ 個飛ばしまでの計 1 本であり、 $n=3k+1$ が奇数であることに注意してその総数を求めると、

$$1(6l + 1) = 6l^2 + l$$

本となる。

一方、対角線の総数は、

$$\frac{(6l + 1)(6l - 2)}{2} = 18l^2 - 3l - 1$$

従って求める確率は、

$$P(n) = \frac{6l^2 + l}{18l^2 - 3l - 1}$$

ここで l を無限大に飛ばすと、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{6l^2 + l}{18l^2 - 3l - 1} = \frac{1}{3}$$

III. $n=3k+2$ のとき

(甲) $3k+2$ 偶数すなわち $k=2l$ のとき

$$n = 3 \times 2l + 2 = 6l + 2$$

同様にして、求める対角線は $2l$ 個飛ばしから $3l$ 個飛ばしまでの計 $1+1$ 本であり、 $n=3k+2$ 偶数であることに注意してその総数を求めると、

$$1(6l + 2) + 3l + 1 = 6l^2 + 5l + 1$$

本となる。

一方、対角線の総数は、

$$\frac{(6l + 2)(6l - 1)}{2} = 18l^2 + 3l - 1$$

従って求める確率は、

$$P(n) = \frac{6l^2 + l}{18l^2 + 3l - 1}$$

ここで l を無限大に飛ばすと、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{6l^2 + l}{18l^2 + 3l - 1} = \frac{1}{3}$$

(乙) $3k+2$ が奇数すなわち $k=2l-1$ のとき

$$n = 3(2l - 1) + 2 = 6l - 1$$

同様にして、求める対角線は $2l-1$ 個飛ばしから $3l-2$ 個飛ばしまでの計 1 本であり、 $n=3k+2$ が奇数であることに注意してその総数を求めると、

$$l(6l - 1) = 6l^2 - l$$

本となる。

一方、対角線の総数は、

$$\frac{(6l - 1)(6l - 4)}{2} = 18l^2 - 15l + 2$$

従って求める確率は、

$$P(n) = \frac{6l^2 - l}{18l^2 - 15l + 2}$$

ここで l を無限大に飛ばすと、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{6l^2 - l}{18l^2 - 15l + 2} = \frac{1}{3}$$

以上 I. II. III. の甲、乙より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \frac{1}{3}$$

が成立する。(証明終わり)

3.6 結論

以上より、円を正 ∞ 角形と近似し、その対角線を弦と考える事によって (命題 1) に $1/3$ という解答を与えることができる。

4. 今後の課題

今回、ベルトランの逆説の答えは $1/3$ であるという説に別解を与える形となった。「無作為」の解釈が争点となっているこの問題に対して、円を正 ∞ 角形と近似し、その対角線を弦と考える事で極めて公平中立なアプローチが実現出来たと考えている。しかし、その証明が多岐に渡ってしまったことは痛恨の極みであり、よりスマートな証明方法の探求を今後の課題としたい。また、 $1/2$ や $1/4$ を導く別解を考察していきたい。そして、既存の 3 つの説について、答えが 3 つ存在するという事は考え難いため、それぞれの問題点について考察していきたい。

5. 参考文献

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%99%E3%83%AB%E3%83%88%E3%83%A9%E3%83%B3%E3%81%AE%E9%80%86%E8%AA%AC>

奈良の算額

5年A組 竹割 幸乃

1. 要約

江戸時代の日本には、算額を神社やお寺に奉納するという風習があった。現代の日本には、1000面近く残っており、その内の5面が奈良には残っている。また、奈良には、庚申堂の算額の問題の1つを、算額最中として売っている店があったり、東大寺に最近、2面の算額が奉納されたりした。

この論文では、そういった奈良にある算額や算額に関連する物を調査し、どういう形で受け継がれ、残っているかについて記した。

キーワード：算額、和算

2. 探究の背景と目的

私は、小学生の頃から、日本地図を作った伊能忠敬が好きでその日本地図の製作に数学の技術も関わっていることを知り、当時、日本で学ばれていた「和算」について興味を持った。

そして、図書館で江戸時代の数学が好きな少女を主人公にした小説、「算法少女」を読んで、江戸時代の日本の人々の数学に対する意識や算額という存在を知り、算額について調べてみた。

すると、算額は全国各地に、今も存在しており、この奈良にもいくつか残っているということがわかった。

なので、どういう形で残っているのか、当時の数学のレベルはどれくらいなのか、算額には問題が描かれているのか、実際にこの目で見たり、問題を解いたりして確かめたいと思ったため、このテーマを選んだ。

3. 探究の内容

3-1. 算額について

・算額とは？

算額というのは、江戸時代の日本で寺や神社等に奉納された数学の絵馬のことで、現在、全国に1000面近く現存している。

難問や問題だけを書いて解答が書かれないもの、解答が書いてあってもどうやって求めたか、書いてないものも多い。

この算額を奉納するという風習は、日本独自の風習であり、算額の一部は、民族文化財や有形文化財に指定されている。



・算額の歴史

奈良時代の日本では、お祭り事や祈願したい時に、神様の乗り物としての馬を奉納するという風習があった。しかし、馬を実際に奉納するのは難しいため、平安時代になると馬の代わりに馬の絵を板に描いて奉納するようになった。絵馬が絵馬と呼ばれる所以もここからきている。

そんな絵馬に数学の問題を書くようになったのは、江戸時代の中期 17 世紀後半になってからだといわれている。この算額を奉納する風習は全国的に大流行し、最も繁栄したときは、1 年間の間に全国の神社やお寺に算額が奉納された数が 100 を超えることもあった。

・どんな人が奉納したのか？

和算家やその弟子はもちろん、そうではないけれど数学が好きな人、数学を学び始めたばかりの人も奉納していた。年代は 10 代の人でもいれば、70 代の人もいてかなり幅広い。

また、奉納者の男女比率は男性が 9 割、女性 1 割の 9 : 1 で、女性が奉納した算額も僅かながら存在している。江戸時代の社会は、男尊女卑の世界で、女性には教育は必要ないとされていて、あまり勉強する機会も男性と比べると少なく、この奉納者の男女比率にも影響しているのだと思う。

・どんな目的で奉納したのか？

算額を奉納した目的は大きく分けて 4 つに分けられる。

1 つ目は、自分の力では解けないと思っていた難問がパッとひらめいて解けたとき。神様や仏様がひらめきを与えてくれたと思い、感謝し、その問題を奉納するというもの。これは、「信仰算額」といわれていて、1 番多いタイプである。

2 つ目は、自分の研究を発表するために奉納されたもの。当時は、今みたいにインターネットもなければ、数学者が全国から集まるような学会もないし、学会誌のような通信物もない。そのため、同じ流派以外の人に自分の研究を誇示するための機会や機関もないので、人の集まる場所に発表しようと算額を利用した。これは、「発表

算額」といわれている。

3 つ目は、「記念算額」で、還暦祝いや開塾 10 周年、初孫誕生などお祝い事を記念して奉納されるものである。

4 つ目は、「宣伝算額」といわれる、自分の流派を宣伝するために奉納されるものである。宣伝のために奉納するので、派手なものも多い。この宣伝算額の中には、問題を書かずに流派と師範と門弟の名前だけというものもあった。

・どんな問題が多いのか？

算額の多い県ベスト 3 に入る岩手県の現存算額 93 面、計 535 題の問題の内容を分類すると、このようになる。

●平面図形 393 題

- (1)円の直径を求めるもの 239
- (2)正方形の一辺の長さ 23
- (3)楕円の長径・短径 21
- (4)接線の長さ 15
- (5)長方形の一辺の長さ 8
- (6)面積を求めるもの 24 など

●立体図形 71 題

- (1)球の直径を求めるもの 31
- (2)立体の長さ・高さ 12
- (3)体積計算 7
- (4)球の総数を求める 5 など

●その他 27 題

- (1)重心を求めるもの 9
- (2)四則演算(そろばん等による) 8
- (3)連立方程式で解けるもの 5
- (4)天文の問題 3 など

●判読不可能なもの 44 題

このように、岩手県の算額は「平面あるいは立体の図形問題」が 86.7% と圧倒的に多く、その中でも「円の直径を求めるもの」は、全体の 44.6%、半分近くを占めている。

これは、岩手県の例だが、全国的に見ても、この傾向が見られる。円の問題が多い理由としては、難問を作りやすく、見た目も美しく、人々の注目も集めやすかったからだと考えられる。

・算額が多い県

算額が多い県は、多い方から順番に、福島、岩手、埼玉、群馬となっている。

まず、福島に算額が多い理由としては、佐久間纘(佐久間庸軒)という和算家の存在が大きい。佐久間氏は、福島で村の農民達に、和算を教えていて、2000人の弟子がおり、最上流という東北にあった和算の流派の中に、佐久間派というものが出来るほど。そういうことから、勢力としてもかなりおおいかったと考えられる。

また、岩手では、千葉胤秀という農民生まれの和算家の影響が大きい。こちらは、最上流ではなく、関孝和の関流を教えていた。

埼玉は、江戸に行く時の通り道だったため、人の行き来が多く、群馬は関孝和の出身地だったためと考えられている。

また、大坂は12面、東京は16面、京都は19面と人が集まる都市に意外と算額が残っていない理由は、戦争で焼け野原になってしまい、焼失してしまったからかもしれない。

このことから、算額が多く残っている地域は、戦争の影響が少なく、優れた師がおり、その弟子がたくさんいた地域であると考えられる。

3-2. 奈良の算額について

奈良に昔からある算額は、主にこの5面である。そのうち、円満寺の1面と弘仁寺の2面は、奈良市の有形文化財に指定されている。また、円満寺から弘仁寺は3kmしか離れておらず、距離的に近い位置にある。今回はこの中の弘仁寺と庚申堂の3面について紹介していこうと思う。

場所		奉納された年	奉納者
円満寺	奈良市	1845年	源治朗
弘仁寺	奈良市	1827年	奥田政八
弘仁寺	奈良市	1858年	石田算楽軒
庚申堂	大和郡山市	1880年	安村清一郎 森内彌三浪
耳成山口神社	橿原市	1854年	梨原喜右衛門

・弘仁寺の算額①



これは、1827年に弘仁寺に奥田政八によって奉納されたものである。

問題

384億4335万9375の9乗根を求めよ

解答

15

この算額には、問題以外に、算木と算盤を使ってある一定の法則に従って計算していて、その計算の終盤の図もこの算額に描かれているらしいが、古いため、近づいてみてもあまりよく見えず、わからなかった。

・弘仁寺の算額②

次に、紹介するのは、弘仁寺の石田算楽軒の門弟中によって、1858年に奉納されたもの。近畿の中でも1番豪華な算額だと言われている。幅が8尺(2m43cm)、高さが4尺(1m22cm)でこの算額の中央には石田算楽軒の肖像画が描かれている。



問題

立方体の中に植物の種子が容器いっぱいにつまっている。その立方体の一辺の長さ(数)はいくらか。

ただし、1立方尺につき、種子が2700万個入っていて、種子の総数は、2296959767162387 77786001643354273280個である。

(※柿は、古い漢字のため、PCで表示出来なかったため本来は「のぎへん」だが「きへん」で表示している)

解答

6兆7262億2540万1695間5尺

この問題文は、実際には縦書きで漢文体で書かれており、数字もちろん全て漢数字で書かれている。問題文が漢文で書かれている算額は珍しくなく、むしろ古文で書かれている方が珍しい。というのも、江戸時代の学術文献や公的な文章というのは、基本、漢文で書かれており、算額もその1つである。

★実際に計算してみた。

この解答に書かれている数字が本当にこの値なのか確かめるために WolframAlpha を使って実際に計算してみた。

まず、種子の総数を1立方尺に入っている種子の個数で割ってこの立方体の体積が何立方尺か求める。

$$\frac{22969597671633462837777860016443542732800000000}{27000000} = 85070591730234615865843651857942052864000$$

次に、さっき求めた体積の3乗根の計算をし、一辺が何尺か求める。

$$\sqrt[3]{85070591730234615865843651857942052864000} = 43980465111040$$

これで一辺が何尺かわかったので、次は単位変換。一間=6尺5寸なので、6.5で割ってみる。

$$\frac{43980465111040}{6.5} = 6766225401698.461538\dots$$

6.5で割った時の余りが知りたいので、一辺の長さ(尺)を6.5で割った整数部分と6.5をかけた数で引く。

$$43980465111040 - 6766225401698 \times 6.5 = 3$$

よって、6766225401698間3尺、すなわち6兆7662億2540万1698間3尺となる。

つまり、算額に書いてある解答の数字、6兆7262億2540万1695間5尺は6兆7662億2540万1698間3尺が正しいことになる。従って、最後の5間5尺は8間3尺の誤差だと推測する。

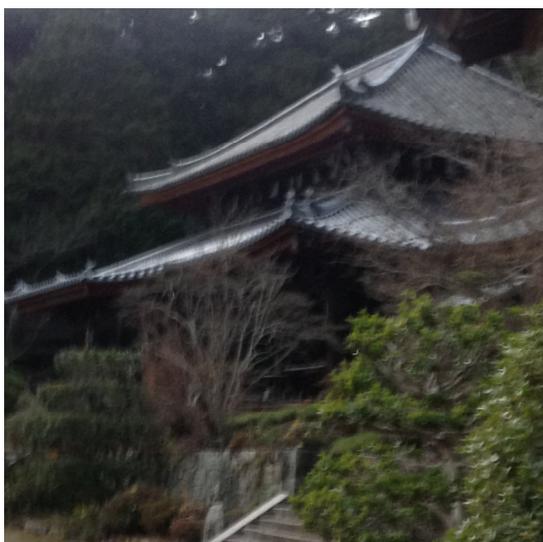
ちなみにこの解答の数字をメートル法に換算すると約130億kmになる。冥王星の軌道の直径の約120億km。つまり、石田算楽軒の描いた立方体は、一辺が130億kmの立方体の中には、太陽系の惑星はもちろん、いまや準惑星となった冥王星までも、ちゃんと入れることができるということになる、という作ることとはもちろん不可能な現実離れしすぎた立方体である。

解いてみてわかったが、この問題は、数字が小さければそこまで苦労しないで計算できるような問題で、他の算額に比べたら解き方自体は易しい方の部類に入ると思う。しかし、大数を使うことによって、電

卓のない、この時代は、解くのがかなり難しい難問になっていたのだろう。また、億や兆は見ることはあっても、極や載といった数を見ることはあまりない。その上、現実的にありえないサイズの立方体。良問とは言い難いが、見た目だけでなく問題の内容でも、目立つこと間違いなしで石田算楽軒を宣伝するのにはうってつけの問題だったのだと思う。

■弘仁寺って？

奈良県奈良市にある、814年(弘仁5年)に建てられたお寺。弘仁寺という名前は、建てられた時の年号から来ている。1573年に一度焼失したが1620年に再建された。



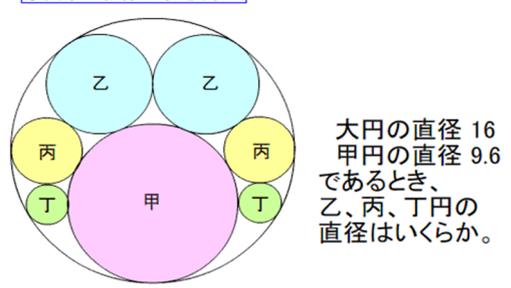
・庚申堂の算額（算額最中）



上の写真は和算研究家の小寺先生が復元した庚申堂の算額であり、これの元の算額自体は、明治時代に奉納されたものである。

この算額に描かれている左から2番目の問題にこんな問題がある。

奈良県大和郡山市・庚申堂



この問題の奉納者の子孫が、奈良の和菓子屋「たば屋」を営んでいて、この問題をプリントした最中、「算額最中」を販売している。

最中の中には、最中の皮の中には、あんこがぎっしり詰まっていて何個でも食べたくなるような味で、まさに1度で2度楽しめるそんなお菓子である。



↑算額最中

3-3. 東大寺に奉納された算額

東大寺で2015年1月23日に、日本数学検定協会主催の奉納式がおこなわれた。日本数学検定協会は1月23日を、「算額文化を広める日」としていて、寺社に算額を奉納するのは今回で2回目。奉納式では、東大寺に関する問題が描かれた2面の算額が、絵馬の並んでいる場所の近くに奉納された。この活動は、これからも継続していく予定だそう。

「この算額がきっかけで、東大寺を見学に来た観光客が日本の和算について知ってもらえるいい機会になれば嬉しい」と協会の会長は語っていた。

また、奉納した2面の算額は、色々な考え方で考えてもらうために、あえて答えをまだ決めておらず、特設ホームページ「算額1・2・3」(<http://www.sangaku123.jp/>)にて、解答を募集しているそうだ。

和菓子屋「たばや」↓



↑奉納式の様子

4. 今後の課題

今後の課題としては、まだ見てない円満寺や耳成山口神社の算額や奈良県外の算額をもっと見学してみて、自力で解いたり解説したりしてみたい。

そのためにも、漢文の力をあげて、算額に何が書かれているかを自分の力で解釈も出来るようになっていけたらと思う。そして、いつかは、自分でも問題を作ってみたい。

そんな風に、当時、算額を奉納していた人の気持ちに少しでも近づきたいと思うし、自分なりに算額という文化を日本の誇れる素敵な文化の1つとして、受け継いでいきたい。

また、今回の探究活動中に江戸時代、寺小屋で数学の教科書がわりに使われていたと呼ばれる「塵劫記」の復刻版を読んでみた。しかし、江戸時代の文章なので読んでみても、どんなことが書かれているかあまり理解出来なかった。そのため、古文は少し苦手だが、これからは、これを読めるようになるために日々の古文の勉強ももう少し頑張ってみたい。



5. 参考文献

・算法少女

作者：遠藤 寛子

江戸時代の数学が好きで数学が得意な町人の娘が主人公の話。

長い間、廃刊になっていたが、最近、復刊され、漫画版も販売された。

ちなみに、「算法少女」という題名は江戸時代に実際に、出版された和算書からきている。

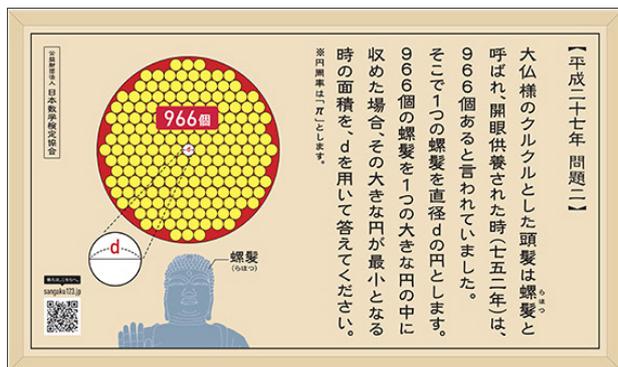
・算額道場

編集者：佐藤健一

著者：佐藤 健一、牧下 英世、伊藤 洋美

日本全国にある算額の中から、いくつかの問題をピックアップして集めたもの。問題の解き方や詳しい解答付き。

算額調査する上のマナーも載っているため、これから算額を見学しに行きたいという方にもおすすめ。



・東海道五十三次で数学しよう

著者：仲 由紀夫

和算や日本における数学の歴史について会話形式で説明しており、絵や図、イラストがたくさん使われており、とても読みやすい。

・江戸の数学和算

著者：小寺 裕

算額最中を売っている「たば屋」で頂いた本。雑学から実際に問題を解いてみるものまでありとあらゆる和算についてのクイズがたくさん載っている。

・別冊日経サイエンス no.169 数学は楽しい

編集者：瀬山 士郎

この本の P.92～100 に載っている Tony Rothman と深山英俊が共同で書いた「算額に見る江戸時代の幾何学」という論文には、弘仁寺の算額も紹介されていて、弘仁寺の算額の近くにもこの論文が飾ってあった。

・弘仁寺の算額について

著者：桑原 秀夫

弘仁寺が発行しているパンフレット。題名どおり弘仁寺の算額についての説明が書いてある。

日本列島を襲う大地震と数学～地震予知は可能か？～

5年A組 西尾美都

1. 要約

日本は地震国と呼ばれるほど地震が多い国である。日本に住む私たちはいつ大地震に見舞われてもおかしくない。大地震が発生する前にその予兆となるものがあれば大地震に備え、被害を減らすことができるのではないだろうか。

私たちの生活している奈良県でも最大震度5強以上を観測するとされている南海トラフ巨大地震は過去の記録を見ると、東南海、南海、東海地震は連動する可能性が高い。つまりこの3つの地方のいずれかで地震が起こったら、他の2つの地方でも地震が発生するかもしれないと予想することができる。また、地震は一つのプレートまたは断層で同じ間隔で大地震が発生するとされているのだが、東南海、南海、東海プレートはいずれも、直近の地震の起こった年から現在までの年数は地震の起こる間隔の年数より長い。つまりいつ大地震が発生してもおかしくないということだ。大地震が起こる前にいつ来るか予想することができたら大地震に備えることができ、被害を減らすことができるのではないだろうか。

ここで新たな、地震を数値化する指数を考える。今まで日本で発生した震度別の地震数から、震度2を基準としてある震度の地震が1度起こった時の数値を定めた。これを地震指数という。その数値は日々変動し、その値と発生した地震の数の推移からある特定の地域などについて地震指数の変化をみることができる。これを用いれば大地震が起こる前の予兆を探ることができるのではと考えた。そしてその地震指数を用いて最近日本で起こった大地震について大地震発生前の地震活動の様子について調べた。

その結果大地震発生前には地震指数の増加がみられる場合があることがわかった。

キーワード：南海トラフ巨大地震 地震 地震指数 地震予知

2. 探究の背景と目的

私は5年ほど前から地震学について興味を持っている。小学生のころからテレビを見ているときにたまに地震速報が流れたり、奈良でも震度3程度の揺れであるが地震が起こったりして地震に関してとても恐れを抱いていた。2011年3月11日、東日本大震災が起こったとき私は部活動のあと帰ろうとしていた時だった。気持ち悪い揺れを感じすぐあとにあった校内放送で震源地が宮城県であることを知りただ事ではないと感じた。家に帰り、どんどん情報が入ってくる中でこれほどの大地震ならば発生する前になにかしらの予兆があるの

ではないか。それをつかむことができれば事前に高台に避難するなど被害を減らす対策ができるのではないかと考えた。そのとき私は東日本大震災発生前2日前に同じあたりの震源地で最大震度5弱の地震が発生していたことを思い出し、その地震は東日本大震災の前触れだったのでと考えた。それから自分の住む奈良県も最大震度5強以上を観測するとされている東南海地震について注目し、本を読んだりインターネットで調べたり、数学の授業で自由なテーマでポスターを作るときは東南海地震の地震発生確率について発表した。

2012年の夏に学校の主催する国際交流の一環である SCoPE に参加し、そこでも他国の人たちと地震学について議論をした。その時プログラムのひとつに実際に東南海地震が起こった時に大阪で感じられる揺れを再現した機械に乗せてもらうということがあった。その揺れはすさまじいもので、震度 5 強といったら建物が全壊するということはあまりない、といった程度のものであるが、実際に地震が来たらパニック状態になって動けなくなってしまうような恐ろしいものであった。

怖くなって調べていくうちに南海トラフ巨大地震が 30 年以内に発生する確率は 80%以上と言われていたり、政府の調査で南海トラフ巨大地震が発生したときの被害は今まで想定していたものの数倍であったりと、危機感を感じるようになった。これは何とか地震予知を可能にして大きな被害の出ることを食い止めな

3. 探究の内容

・私たちの身に迫る南海トラフ巨大地震

小さな島国でありながら世界の地震発生数の約 10% が日本で発生している。2011 年に東日本大震災が発生して、それから特に地震に関して注目が集まるようになった。私たちの住む奈良も南海巨大トラフ地震が発生すると大きな被害に遭うと予想されている。また、南海地震・東海地震・東南海地震は、過去の記録より連動するようなので、被害が一つの大地震が発生するときよりも大きくなってしまおうと予想できる。数百年に一度の時代に生きている私たちはこの問題から目を背けることはできない。前回起こった東南海地震、南海地震、東海地震は比較的規模の小さいものであったので大地震とカウントしないとする学者もいる。南海ト

ければという思いが強くなった。今回のコロキウムの講座では社会に役立つ数学について学んできた。数学の中でも確率というものは特に社会と密接していて社会の重要なキーであると思っている。自分の探求したいこと深められるこの機会に確率の考え方をういて数学で地震をひも解いていこうと私はこのテーマを選んだ。今回データから見つけられたことはほんのわずかにすぎない。しかしもっとこの研究を続けていく意味があるように思えたので大学でもこの内容についてさらに多くのデータをもとに地震指数を確立させていきたい。地震指数と大地震発生の関係性が見えればそれを世間に発表して少しでも地震による被害を減らしたい。

ラフ巨大地震は起こる間隔は 200 年くらいとされていて、1944 年の地震のひとつ前の地震は 1854 年に起こっているの、2000 年代に南海トラフ巨大地震が起こることは確実視されている。南海巨大トラフ地震の定義は、フィリピン海プレートとアムールプレートとのプレート境界の沈み込み帯である南海トラフ沿いで発生する巨大地震のことである。また、2011 年 8 月に内閣府に設置された「南海トラフの巨大地震モデル検討会」が検討した、南海トラフ沿いで発生すると想定される最大クラスの地震も「南海トラフ巨大地震」と称する。東海地震、南海地震、東南海地震のこれらの地震の総称が南海トラフ巨大地震である。

過去の南海巨大トラフ地震について（年表）

東南海地震	南海地震	東海地震
684年	684年	684年
887年	887年	887年
1096年	1099年	1096年
1361年	1361年	
1498年		1498年
1707年	1707年	1707年
1854年	1854年	1854年
1944年	1946年	

・1923年以降の大地震

1923年の関東大震災が起こってから気象庁は各地に地震計を設置し、詳しい地震のデータを記録するようになった。1923年以降、気象庁が名前を決定した大地震は2015年2月23日時点で67地震もある。地震に名前を付けるのは気象庁である。混同されがちなのが災害名

と地震名は違うということである。たとえば、「阪神淡路大震災」は内閣が決定した災害名でこの災害を引き起こした地震の正式名称は「1995年兵庫県南部地震」で、これは気象庁が命名したものである。

1923年 関東大震災	1953年 房総沖	1983年 日本海中部
2007年 新潟県中越沖		
1925年 北但馬	1956年 白石	1984年 長野県西部
2008年 岩手・宮城内陸		
1927年 北丹後	1958年 択捉島沖	1987年 千葉県東方沖
2011年 東北地方太平洋沖		
1930年 北伊豆	1961年 長岡	1993年 釧路沖
2014年 長野県神城断層		
1931年 西埼玉	1961年 北美濃	1993年 北海道南西沖
1933年 昭和三陸	1962年 広尾沖	1994年 北海道東方沖
1935年 静岡	1962年 宮城県北部	1994年 三陸はるか沖
1936年 河内大和	1963年 択捉島沖	1995年 兵庫県南部
1938年 屈斜路湖	1964年 新潟	1997年 鹿児島県北西部
1938年 福島県東方沖	1965年 静岡	1998年 石垣島南方沖
1939年 男鹿	1968年 えびの	1998年 岩手県内陸北部
1940年 積丹半島沖	1968年 日向夏	2000年 鳥取県西部
1941年 長野	1968年 十勝沖	2001年 芸予

1943年 鳥取	1969年 色丹島沖	2003年 十勝沖
1944年 東南海	1969年 岐阜県中部	2004年 紀伊半島沖
1945年 三河	1972年 八丈島東方沖	2004年 新潟県中越
1946年 南海	1973年 根室半島沖	2004年 留萌支庁南部
1948年 福井	1974年 伊豆半島沖	2005年 福岡県西方沖
1952年 十勝沖	1978年 伊豆大島近海	2005年 千葉県北西部
1952年 大聖寺沖	1978年 宮城沖	2006年 伊豆半島東方沖
1952年 吉野	1982年 浦河沖	2007年 能登半島

6.7地震

・地震指数

ここでこれらの大地震のうちから新潟中越沖地震、東日本大震災、長野県神城断層地震についてそれらの地震の発生前数十年の地震のデータを調べ、予兆となるものを探した。

初めは年ごとの地震発生数を数えていたが、作業を進めていくうちに震度2の地震も震度5

弱などの地震を同等に扱っていいのか。また、震度ごとに数値を定めるにしても震度2を2、震度3を3、震度4を4...というように単純に決めてもいいのか、という疑問が浮かんだ。この二つの疑問を解決するために私が新たに考案したのが次に紹介する地震指数である。

2	3	4	5弱	5強	6弱	6強	7
36667	10490	2289	357	61	42	11	3

(1923年1月1日から2015年1月5日まで)

この表は1923年1月1日から2015年1月5日までの日本での最大震度別地震発生回数である。この回数は気象庁のホームページから調べることができる。

(<http://www.data.jma.go.jp/svd/eqdb/data/shindo/index.php>)

(震度)	2	3	4	5弱	5強	6弱	6強	7
(回数)	a	b	c	d	e	f	g	h

- 震度 2=0.1
- 震度 3=0.1*a/b
- 震度 4=0.1*a/c
- 震度 5弱=0.1*a/d
- 震度 5強=0.1*a/e
- 震度 6弱=0.1*a/f
- 震度 6強=0.1*a/g
- 震度 7=0.1*a/h

この表から、震度2を0.1として(震度1はたくさん起こりすぎているのでカウントしない)震度3、震度4...とそれぞれの値を決める。

一般的な決め方は次の通り

地震指数は1923年から現在までの日本全土の震度2から震度7の地震の発生回数から、震度2を基準としてほかの震度の値を決めたものである。

今回は2015年1月5日時点での地震指数を用いた。その値は下の通り。

- 震度2の地震1回を0.1とすると
- 震度3→0.3495
- 震度4→1.602
- 震度5弱→10.27
- 震度5強→60.11
- 震度6弱→87.28
- 震度6強→333.2
- 震度7→1222

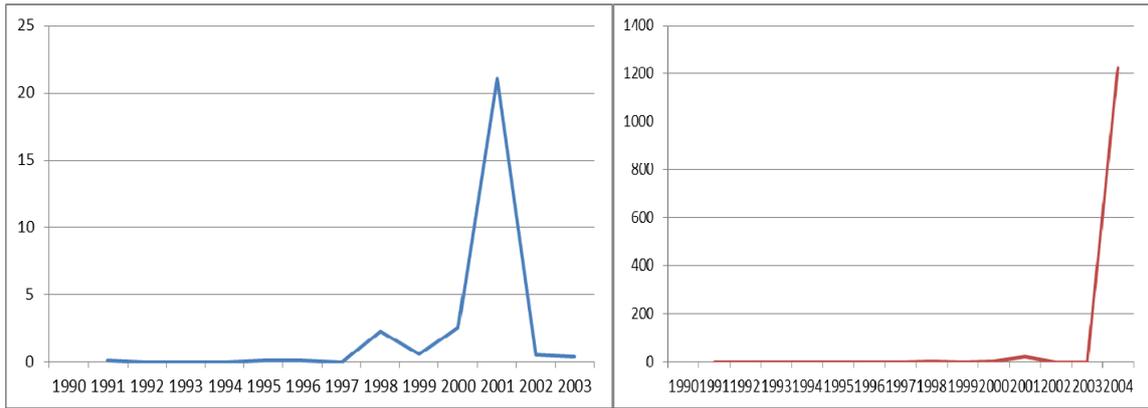
となった。

この値を用いて今回は2004年に発生した新潟中越地震、2011年に発生した東日本大震災、2014年に発生した長野県神城断層の3つの大・3つの大地震と地震指数

地震の発生20年前からの地震のデータから予兆を探った。

新潟中越地震

中越地方(新潟中越地震)	1	2	3	4	5弱	5強	6弱	6強	7	地震指数
1990	4	4	3	1						
1991	2	1								0.1
1992										0
1993	1									0
1994	1									0
1995		1								0.1
1996	1	1								0.1
1997	2									0
1998	2	3	1	1						2.2515
1999	6	6								0.6
2000	6	6	1	1						2.5515
2001	6	5				2				21.04
2002	7	5								0.5
2003	5	4								0.4
2004	9	5	1	1					1	1224.452



2004年に震度7の地震が起こっていて急に地震指数が大きくなっているの(左のグラフを参照) 2003年以前の細かい地震指数の動きをみるために2003年までの地震指数のグラフを作った。(右のグラフを参照)

前から地震指数の増加がみられた。これは大地震発生の予兆とみてもいいのではないだろうかと考えた。

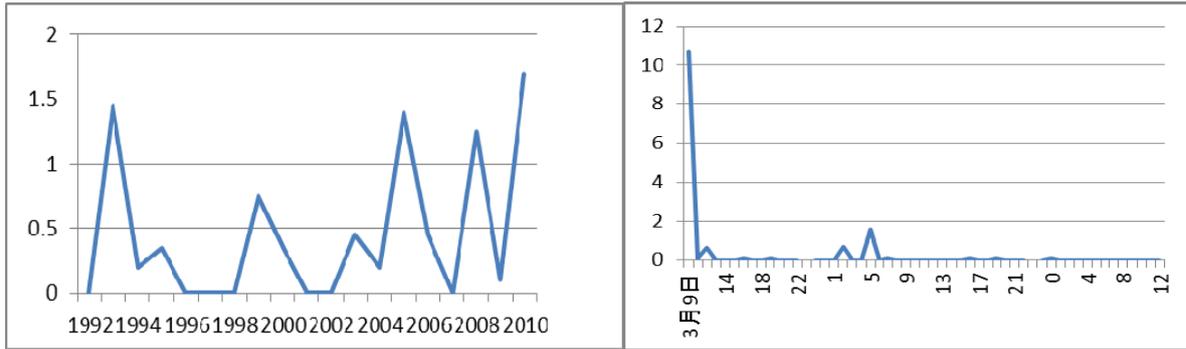
1975年から1990年まで震度1の地震も起こっていなかった。しかし地震発生の6年ほど

東日本大震災

三陸沖(東日本大震災)	1	2	3	4	5弱	5強	6弱	6強	7	地震指数
1992	1	1								0
1993	7	4	3							1.4485
1994		2								0.2
1995	3		1							0.3495
1996	1									0
1997										0
1998	2									0
1999		4	1							0.7495
2000	10		1							0.3495
2001	3									0
2002	2									0
2003	7	1	1							0.4495
2004	4	2								0.2
2005	12		4							1.398
2006	1	1	1							0.4495
2007	2									0
2008	3	2	3							1.2485
2009	4	1								0.1
2010	3	1		1						1.702
2011(3月11日14時50分まで)	30	12	4	1	1				1	1236.47

先の新潟中越地震と同様に2011年に地震指数が急増したので2010年までのグラフをしてみる。

今回は地震発生2日前の3月9日から時間で区切ったグラフも作った。

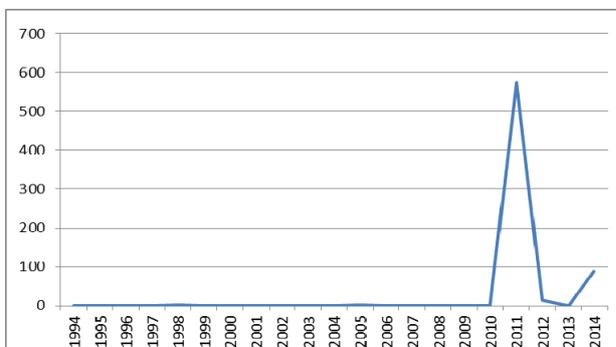


左の地震発生前 20 年間（左のグラフ参照）は地震指数は低い値（平均が 1 を下回る）をとっていた。しかし東日本大震災発生 2 日前震度 5 弱の地震が発生した。それから地震活動が活発になり、2 日後の 3 月 11 日に最大震度 7 を

記録した大地震が起こった。3 月 9 日に発生した地震は大地震の予兆であったのではないだろうか。

長野県神城断層

長野県北部(長野県神城断層)	1	2	3	4	5弱	5強	6弱	6強	7	地震指数
1994	2									0
1995	2									0
1996	1									0
1997	4		1							0.3495
1998	1	2			1					1.802
1999	3				1					1.602
2000	5	1								0.1
2001	7	4								0.4
2002	3									0
2003	4									0
2004	6	2	2							0.899
2005	9	6			1					2.202
2006	3	4								0.4
2007	6	3								0.3
2008	3	2								0.2
2009	3	2	1							0.5495
2010	6									0
2011	186	82	40	15	2			2	1	574.51
2012	37	12	5	1	1					14.8195
2013	19	4								0.4
2014	10	9						1		88.18



グラフ、表ををみると 2014 年 11 月 22 日に起こった長野県神城断層地震は地震発生前に断層活動が活発になる様子が見られなかった。

2011 年 3 月 12 日に起こった最大震度 6 強を記録した地震の余震ではないかと考える。2011 年の地震は名前が付けられていないが、

東日本大震災の翌日に発生したので長野県は

“第二の被災地”とも言われている。

・地震指数の活用に向けて

地震は毎日世界中で起こっている。

地震指数は最新のプレートや断層の動きを即時に取り入れることができる指数である。日本だけでなく世界の地震活動の様子を数値化することも可能であり、またもっと狭い範囲、たとえば近畿地方のみでの地震指数を考えることができる。

場所によって地震指数の平均値は違うが大地震の予兆となり得る地震指数の増加はどこでも見られるのではないか。

今回は3つの例でしか探ることができなかったが、地震指数と断層、プレートの関係と大地震をつなぐものをもっとたくさんの例で探していけば手がかりはつかめるかもしれない。大学に入ったらこの内容についてもっと探求していきたい。

将来的には場所によって違う大地震発生前の地震指数の変化を分析し、予兆が現れたらその住民に知らせるようなシステムを作りたい。自然を相手にするには地学だけ、数学だけ

の視点から考えるのではなく様々な方向から広い視野を持って立ち向かう必要がある。今回のコロキウムの講座では数学と社会の深いつながりについていろいろな側面から知ることができた。私は数学の様々な分野の中でも確率の分野は特に社会と密接に関わっていると思う。この地震指数も確率や統計の分野から地震について考えているが、この研究で何か結論を導くことができたなら、多くの地震の被害に合うかもしれない人を救うことができるだろうし、地震予知の情報というものは日本において、また世界の地震国でも求められているものではないだろうか。

大地震国の日本に住んでいるからには国民誰もが目を背けることのできない大問題に立ち向かい、人や社会の役に立つような研究を続けていきたい。

4. 今後の課題

今回、2015年1月5日時点での地震指数を用いて3つの過去の大地震を分析したが、より正確な地震指数の値を出すには大地震が起こった当時の地震指数を用いる必要があった。このことに気付いたのが遅く、大地震ごとに対応する地震指数を決定して分析する時間がなかった。これから過去の地震について地震指数の推移をみるときは対象の地震ごとの地震指数を用いるようにしたい。

また、地震の大きさを表す方法は震度とマグニチュードの二通りがある。今回は私たちに実際の被害を及ぼす最大震度で地震指数を決めたが、地震のエネルギーを正確に表しているのはマグニチュードの方なのでどちらの方が地

震指数としてふさわしいのか考慮する必要がある。

他にも、今回は断層のずれによる地震とプレートのひずみによる地震について同じように扱ったが、一般的にプレートでの地震のほうが断層での地震に比べてマグニチュードが大きくなる。しかし実際私たちが住んでいるところとプレート地震の震源地は断層での地震、直下型などの地震と比べると離れているので小さいマグニチュードでも断層での地震は最大震度が大きくなることがある。これら2種類の地震を同じように扱っていいのか。これも熟考する必要のある課題である。

5. 参考文献

南海トラフ巨大地震について

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%97%E6%B5%B7%E3%83%88%E3%83%A9%E3%83%95%E5%B7%A8%E5%A4%A7%E5%9C%B0%E9%9C%87>

南海、東海、東南海地震について

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%9D%B1%E5%8D%97%E6%B5%B7%E5%9C%B0%E9%9C%87>

地震の年表（日本）

[http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%9C%B0%E9%9C%87%E3%81%AE%E5%B9%B4%E8%A1%A8_\(%E6%97%A5%E6%9C%AC\)](http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%9C%B0%E9%9C%87%E3%81%AE%E5%B9%B4%E8%A1%A8_(%E6%97%A5%E6%9C%AC))

1923年から現在までの震度別地震発生回数

<http://www.data.jma.go.jp/svd/eqdb/data/shindo/index.php>

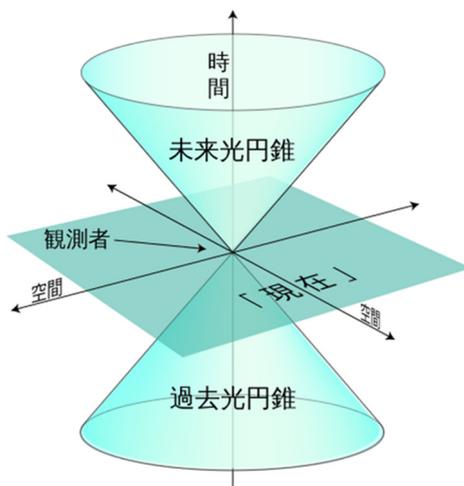
相対性理論における超光速の物質について

5年B組 田中 海

1. 要約

僕は、相対性理論における超光速の物質について調べた。下に調べた内容の要約を書く。三つの空間軸と一つの時間軸を用いた四次元世界で超光速の物質の動きを図的に考えると、条件を満たしたものは過去に飛ぶ。

四次元世界とは、いままで扱ってきた三次元空間とそれに直交する一つの時間軸を考えた座標系で、下図のようなものである。これは図で表すために空間軸を一つ減らしたもので、本来はこれに直交するもう一つの空間軸が存在する。



図的に考えるために四次元における距離を、三次元距離と因果律を組み合わせて定義する。距離と定義した数式を因数分解すると二つの領域が考えられる。

上図の光円錐内を時間的領域、その外を空間的領域とよぶ。この世界の上に世界線を描いて、図的に物質の動きを考える。

空間軸を一つにして二次元世界を考えると、等速直線運動する物質は直線としてその動きを表すことができる。

ここで、ある慣性系に対して一定速度で動く別の慣性系を一つの座標上に表すと斜交座標になる。ある慣性系から発射した物質をもう一つの座標系で反射して帰ってきた物質の動きを考えると、条件を満たしたものが過去に飛ぶことが分かった。

2. 探求の背景と目的

このテーマを選んだ理由は、授業で相対性理論を扱っていたときに光の速度に合わせて時空が歪んでいることにおもしろみを感じて、さらに理解を深めたいと感じたからだ。現在の科学にたくさん応用されている相対性理論を理解することで、現代の科学の根本を知るとともに新しい何かを見つけられないかと思って勉強した。

3. 研究の内容

研究内容は題名の通りで、超光速の物質の動きについてのものである。

まず、四次元世界の距離を定義する。四次元距離は因果律と三次元距離を組み合わせたもので、因果律とはどんな情報も光速を超えて動くことはないというもので、三次元距離は今まで扱ってきたものと同じものである。

因果律より、どんな情報も光速を超えて動くことはないので、次の式が成り立つ。

$$ct \geq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

この式を移項して、両辺を二乗すると、四次元距離 s を、

$$s^2 = ct^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

と定義する。

ここで便宜のため空間軸を一つにしぼって考える。すると前式は、

$$s^2 = ct^2 - x^2$$

となり、因数分解すると

$$(ct - x)(ct + x) = s^2$$

となり、 $s^2 > 0$ の領域を時間的領域、 $s^2 < 0$ の領域を空間的領域とよぶ。

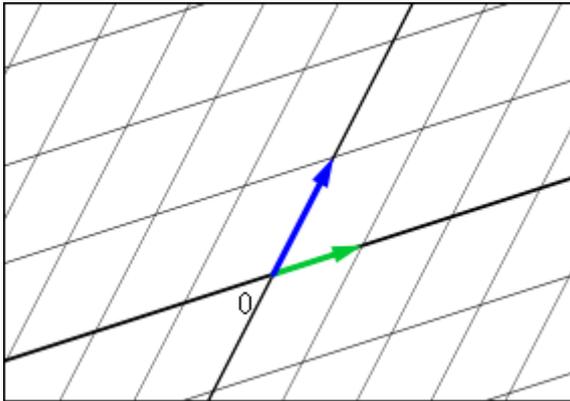
ここで座標上に物質の動きを描く。こうして描かれた線のことを世界線と呼ぶ。

いろいろな場合が考えられるが、わかりやすいように等速直線運動する物質の世界線をかくとすると、物質の速度を v と置くと傾き c/v の直線になる。

次にある慣性系に対して速度 v で動く慣性系の座標を元の慣性系の座標の上に描く。

ある慣性系に対して速度 v で t 秒間動いたとき、その点の x 座標は $x=vt$ となり、式変形すると、 $x=(v/c) \cdot ct$ となり、これが ct' 軸である。

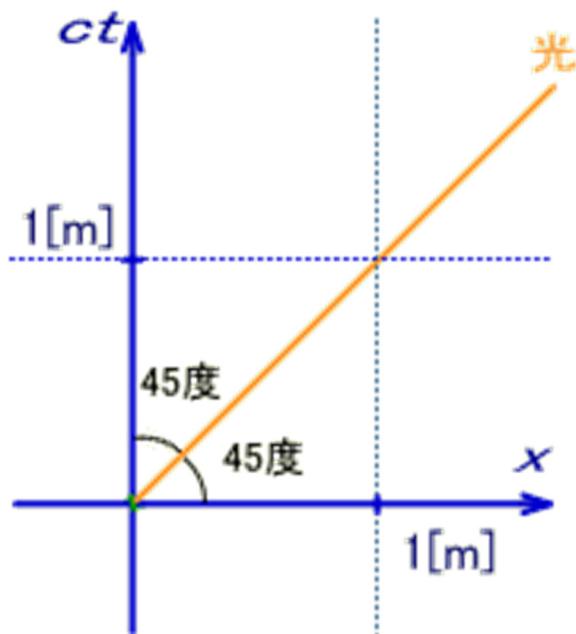
光の速さは誰から見ても一定であり、つまり常に傾き 1 の直線になっていなければならない。ここから、 x' 軸は ct' 軸の傾きの逆数をとった傾き c/v の直線である。図で表すと次のようなものである。



今まで扱ってきたものとは違って斜めに軸が交わっていて分かりづらいが、青の→が ct' 方向に 1 目盛り、緑の→が x' 方向に 1 目盛りである。

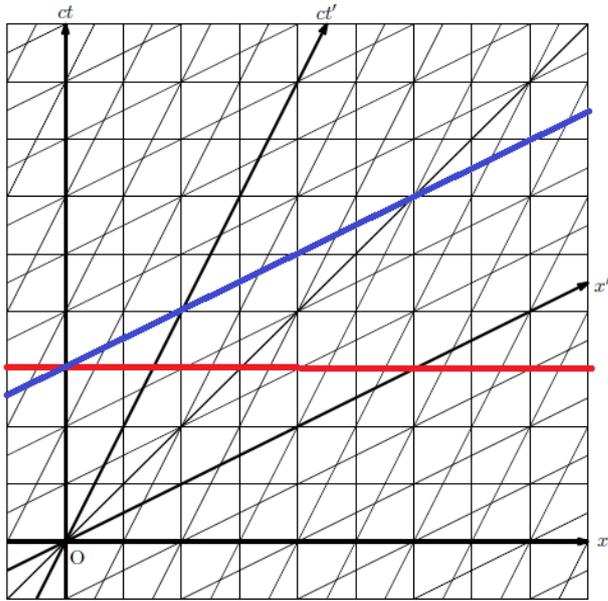
ここで二次元世界の図示をする。

二つの次元について時間軸と空間軸一つずつについて考えるので、時間軸に ct 、空間軸に x (y でも z でも可) をとったものをミンコフスキー時空という。



この時の時間軸の考え方は一目盛りあたり光が 1m 進むのにかかる時間(時間が 1m)と考える。このようにして考えると、この座標に描く光の世界線は傾き 1 の直線になる。

次に同時の定義をする。同時とは、二つ以上の事件が同じ時刻で起こったなどのときに言われる同時と同じものである。直交座標のときの同時は空間軸に平行な線で同時を表していたが、斜交座標でも同じように定義する。

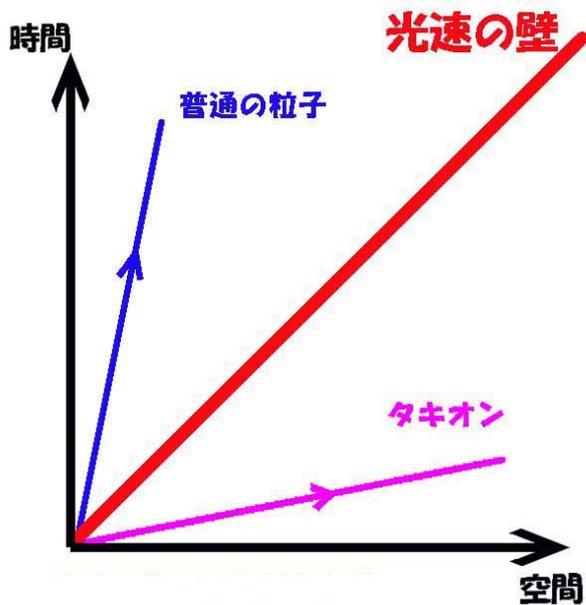


図の赤い線は直交座標の同時の直線、青い線は斜交座標の同時の直線である。

タキオンの世界線について考える。

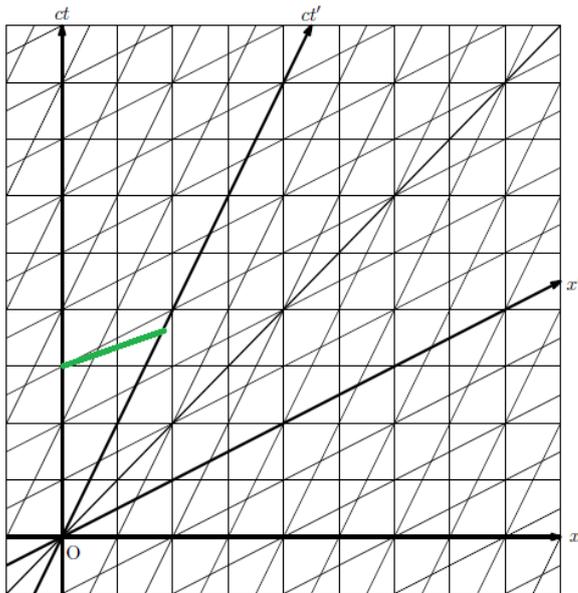
タキオンの速度を v とおくと、 $v > c$ であるため、その世界線の傾きは必ず 0 より大きく 1 未満である。

逆に今まで扱ってきた物質は全て $v < c$ なので、その世界線の傾きは必ず 1 より大きくなる。二つの物質の動きを図示すると下のようになる。

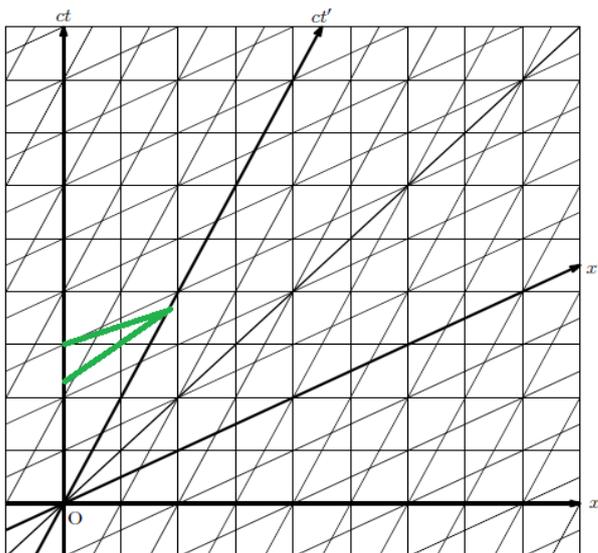


自分のいる慣性系からタキオンを発射しただけではどうなるか分からないので、自分のいる慣性系に対して速度 v で動く慣性系にむけてタキオンを発射し、それを反射してきて動きを見る。

直交座標の上の斜交座標と物質の世界線を作図すると図のようになる。



このタキオンを反射させて元の座標に戻すと



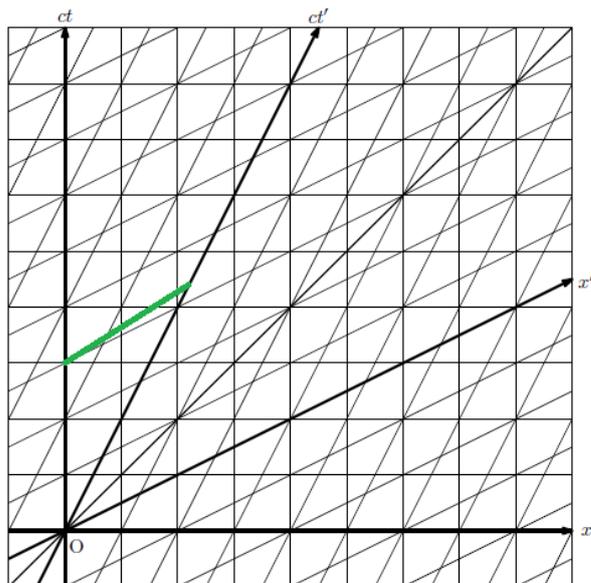
このようになり、到着点の時間はスタート地点よりも前であることが図から読み取れる。

ここで行きの時の傾きと帰りの時の傾きが違う理由について、行きの時に考える座標と帰りの時に考える座標が違うからである。

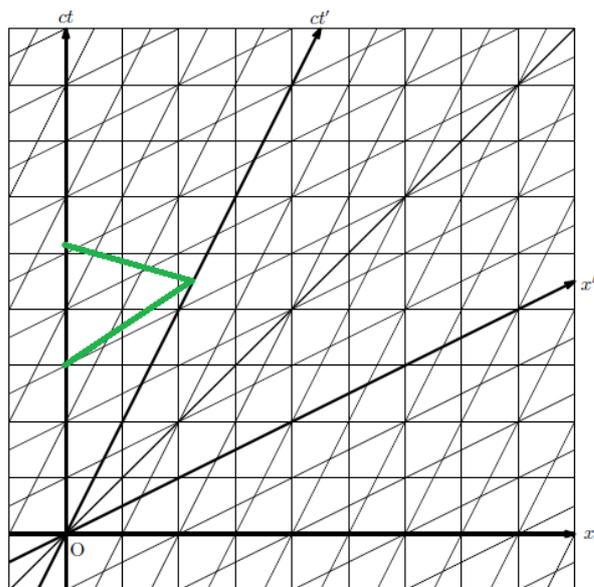
行きの時は直行座標での傾きを図示して帰りの時は斜交座標での傾きを図示している。これは、タキオンが基準にする座標が変わったためである。

このことを踏まえたうえで、次は過去に飛ばない場合を考えてみる。

過去に飛ばない場合はこのような場合である。



このタキオンを反射すると図のようになる。



図から見てわかるように、このタキオンはスタート地点よりも未来に到着していて通常の物質と同じような動きをしていることがわかる。この条件を考えてみた。

ある慣性系に対して速度 v で動く慣性系に速度 w のタキオンを等速直線運動させて発射して、反射して送り返す。

基準にした慣性系を直交座標に選び斜交座標を作ると、 ct' 軸は傾き c/v の直線になる。

この時、同時の世界線は傾き v/c の直線になる。

送ったタキオンが過去に帰るためには到達した慣性系の過去に飛ばさないと。(帰りは到達先の座標を基準に考えるため)

タキオンの世界線は傾き c/w の直線になる。

ここで到達先の過去に飛ばすための条件は

$$\frac{v}{c} > \frac{c}{w}$$

この式を変形すると、

$$v \cdot w > c^2$$

よってこの条件を満たした物質のみが過去に飛ぶことができる。

光速を超える場合について

自分が読んだ本には光速を超えるものについては相対性理論に従うためには因果律さえ守ってればよい。つまり、情報を運ばなければ光速を超えても相対性理論に反することはない。情報を運ばない物質の動きを考えるならば速度はどれだけ速くてもよい。

逆に因果律を破るようなもの(タイムマシンとか)が発明されたのならば相対性理論は間違っていて何かほかの理論が存在するといえる、と書いてあった。

確かに物理法則は都合のよいものでその時代の考え方によって姿を変えてきた。

ニュートン力学から相対性理論に考え方が変わったのは代表的なものだ。なので、今は正しいとされている相対性理論が覆されてもおかしくないと考えられる。

4 今後の課題

勉強する期間が短かったこととほとんど自分で勉強したこともあって多少理解に誤りがあるかもしれない。もっと考える時間をとって、専門の知識を持った人に質問してさらに理解を深めたい。

ここではまだ慣性系についてしか考えていないので、加速度や重力を考慮した場合にはどのような影響があるのか、同じように考えてもよいのか気になった。

ここでは図的に考えていたが、ローレンツ変換を使った場合はどのような考え方ができるのか、またローレンツ変換を使った場合も過去に飛ぶのか考えたい。

相対性理論の初歩しか触れていないので、特殊相対性理論、一般相対性理論についても勉強したいとおもった。

5 参考文献

なっとくする相対性理論 (松田卓也、二間瀬敏史 講談社)

URL

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%9B%B8%E5%AF%BE%E6%80%A7%E7%90%86%E8%AB%96>

http://www1.odn.ne.jp/~cew99250/html/R_8.html

和算と円周率

5年B組 早崎 真也

1. 要約

僕は和算とはいかなるものだったのか、何が欠点だったのか、さらに和算において円周率はどのように計算されたのか、また関孝和のどこが偉大だったのかについて、本、インターネットから調べた。

キーワード：和算・関孝和・円周率・エイトケンの $\Delta 2$ 乗加速法・勾股弦

2. 探求の背景と目的

自分は前から「和算」という言葉をきいたことがあったが、どういうものなのかを知らなかった。今年一年間コロキウムの授業を受けるなかで数学と歴史についても学んだが、日本ではいかに数学の発展があったのかについては学ばなかった。そこで今回の探求で、日本独自の数学が最高点に達したとされる江戸時代の数学について調べた。特に授業のなかでもふれた円周率について、和算ではどのくらいすすんでいたのか興味をもったので、深く調べることにした。

3. 探求の内容

(1) 和算とは

「和算」とは江戸時代に大きく発達した日本独自の数学である。和算とは明治時代に入ってきた洋算に対してもとからあった数学をさした言葉である。江戸時代、日本は鎖国していたため、日本における数学は鎖国する前に伝わってきていた中国の数学をもととして独自に発展を遂げた。和算の主な特徴としては以下のものが挙げられる。

- ・遺題継承
- ・算額奉納
- ・庶民も楽しむ

和算が発達する始まりともなった本が1627年に数学家の吉田光由(1598~1672)が発刊した「塵劫記」である。この本には終わりに「遺題」という解答のない問いが載せてあった。これが始まりとなり、遺題を解いて解いた人がまた遺題を作るというサイクルができた。解いたものや新しい遺題を書いて神社に奉納したものが算額である。(写真のもの)

また、「塵劫記」は庶民のあいだでもベストセラーになったらしい。日本人には数学の素養があったということを示している。和算の問題には難しいものもあったが、鶴亀算や油分け算など生活に直結するものも多かった。

一方で和算には大きな欠点もいくつかあった。主に以下のようなものである。

- 座標を用いない
- 関数の概念がない
- 角度を用いない
- 難問主義



調べていくなかで和算がものすごく発展していたことが分かったので、座標、関数の概念がないというのは不思議な気もするくらいであったが、いま何とも考えずに使っているこれらのありがたさがわかった。調べる前和算に微分積分の概念があったのかが大いに興味のあるところではあった。和算では幾何学が大きく進歩していたので、面積を求める際に「今でいうと積分にあたる」というような考え方はあっても、関数の概念がないので今のような微積分はなかった。

角度をあまり用いないというのは、今なら角度も関係性で解くだろうという問いも、和算では辺の長さの関係などから求めることが多いということである。

4つ目の難問主義というのが、ある意味最も和算の洋算に劣っている点だと思われる。前述のように、和算では遺題継承・算額奉納という独特のシステムで数学は発展してきた。しかし、時代がたつほどそこに書かれる問いは難問化した。これは必ずしも悪いことではなく、そのことが解く方法を進歩させたのだが、一方で和算はあくまでも問題を解くための術でしかなかったともいえる。これが和算が「算術」といわれる所以である。洋算ではユークリッドの「原論」に代表されるように、数学は問題を解くためだけにあるのではなく論理として体系づけられている。つまり、洋算には証明がつきまとうが和算は「解いたら終わり」なのである。このことが和算の洋算に劣る最大の点で逆に言えば洋算、いわゆるギリシャ数学の最大の長所だとわかった。和算では、算額や関孝和の本のなかでも計算過程や何故そう考えたのが飛ばされている。自分たちが今学んでいる数学は、まさにそういった論理の部分を重視するので、算術と数学には大きくちがいがあろうと思う。

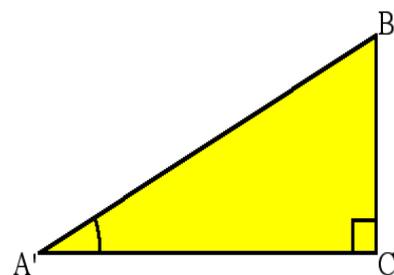
②和算の計算方法

i 勾股弦の定理

西洋数学における三平方の定理のことである。直角三角形において、直角を挟む辺のうち、短い方を勾、長い方を股、直角に対する辺を弦という。

勾股弦の定理を用いることを環矩術という。

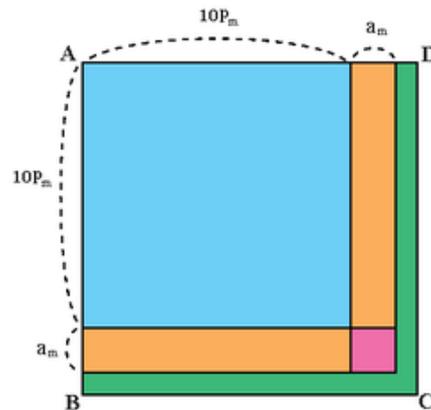
右図において勾は BC、股は AC、弦は AB である。



ii 開平法

関孝和の計算では漸化式を計算する際に何度もルートを開平しなければならないが、当然現代のように計算機があるわけではない。そこで関は以下のように平方根を求めたと考えられている。(関はいかに計算したのかを著書にのこしていない)

副運算	主運算
9	9 2 3 3
9	85 24 82 89
182	81
2	4 24
1843	3 64
3	60 82
18463	55 29
3	5 53 89
18466	5 53 89
	0



開平法、筆算

イメージ図

図が示すのは筆算と照らし合わせると、面積が 85248289 の正方形の一边を求めると、9233 となることがわかる。筆算の方法は、次のとおりである。

- ① 主運算を小数点を基準として 2 桁ずつ区切る
- ② 1 番上のくらの数 (85) の上と副運算の頭に、2 乗すれば 85 に一番近くなる最大の整数 (今回は 9) をかき、主運算ではつぎの 2 桁をおろしてくる (→424)。副運算では 2 乗になった数をもう一個かき足す。
- ③ つぎは $180 \times \times$ が 424 より大きくならない最大の数を探す (2)
- ④ この操作を繰り返す

イメージ図でいうとルートを求めることはその面積を持つ正方形の一边の長さを求めることである。まず②で水色の正方形を全体から取り除く。③がオレンジの長方形 2 つとピンクの正方形分の面積である。オレンジの部分のように 2 個ずつ長方形が残るので副運算で $9+9$ をしている。このようにして少しずつ正方形の一边の長さに近づいていくのが開平法である。

(2) 関孝和について

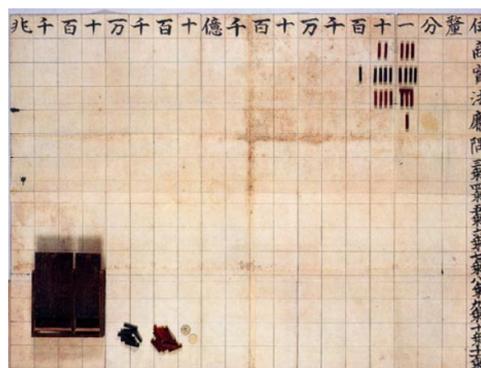
関孝和 (1640 頃~1708) は江戸時代の和算家である。この人はまさに天才で『算聖』といわれた。業績としては



- ・ 傍書法を作った
- ・ 行列式の発見
- ・ ベルヌーイ数の発見 がある

傍書法というのは和算における数字・計算の表記方法である。これが出来る前、和算では写真のような算木、算盤というものをを用いて計算をしていた。これを紙の上でも行えるようにしたのが関のつくった傍書法である。それまでの和算では天元術という名で文字が一つの場合には解くことが出来た。

しかし傍書法の登場によって、今でいう連立方程式の未知数を消去するということが容易になった。また、後で説明する円周率の計算においても、関は小数点20桁程の計算を手計算でこなしているが、これがなければできなかったであろう。関の後に出てくる和算家たちもこれに大きな恩恵をうけた。



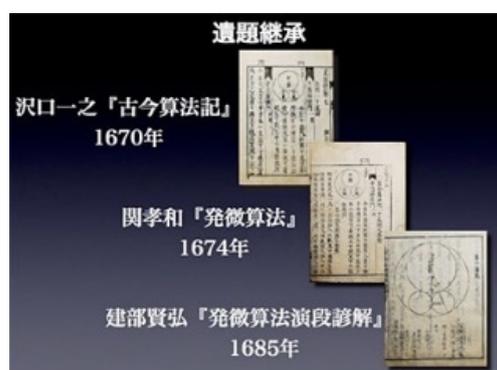
また行列式の発見はライプニッツよりも10年前に、ベルヌーイ数の発見はベルヌーイよりも1年前にしていたらしい。これらの年数は誤差といえる範囲ではないかと思っただ、少なくとも関孝和は西洋の数学に同時期に、しかも独力で達していた。

関が生前自らの著書として唯一遺した本が発微算法（はつびさんぼう）である。これは沢口一之の『古今算法記』の遺題15問に答えを与えたものである。その他にも著作として残っているものがあるが、弟子たちが後にまとめたものである。これらから関がどこまで研究していたのかがわかる。

関の死後もその数学は弟子たちに「関流」として受け継がれた。代表的な弟子に建部賢弘がいる。この人は説明がとて少ない発微算法の注となる本を書いたり、円周率の研究においても業績を残した人である。（写真）

関が居なければ和算の発展はありえなかっただろうと考えられる。

次にその関孝和が円周率の研究についてはどういう業績を残したのかについて述べる。

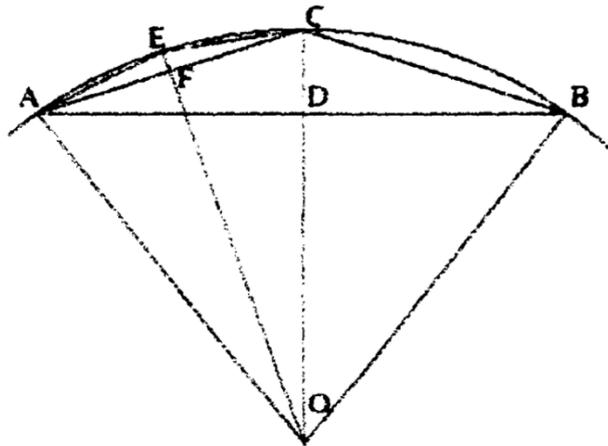


(3) 円周率を求める

今回は特に、関孝和がいかにして円周率を求めたかについて調べ、再現した。

関孝和は正 2^n 角形の n を増やして円に近似させていくという方法で円周率を求めようとした。関は最終的に17けたまで正しい値を求めた。

$AB=2^n$ 角形の1辺
 $AC=2^{n+1}$ 角形の1辺
 $AE=2^{n+2}$ 角形の1辺



とする
 2^{n+1} 角形の一辺を 2^n 角形を使って表し漸化式によって 2^n 角形を円に近似していったのが関のやり方である。

$\triangle ACD$ に注目したとき、勾股弦の勾は CD 、股は AD 、弦は AC となる。
 これを 2^{n+1} の勾、股、弦とする。
 ここで勾を a 、股を b 、弦を c とすると下のような漸化式が成立する。

勾 (a)
$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - c_n^2} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

股 (b)
$$b_{n+1} = \frac{1}{2} c_n \quad \dots \textcircled{2}$$

弦 (c)
$$c_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

以下にこの漸化式の成り立つ理由を述べる。図において 2^{n+1} の勾は CD である。

$BO=CO=\frac{1}{2}$ で、 BD は 2^n 角形の弦の $1/2$ だから

$$CD = \frac{1}{2} - DO$$

$$= \frac{l}{2} - \sqrt{BO^2 - BD^2}$$

$$= \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}BA^2}$$

$$= \frac{l}{2} (1 - BA^2) \quad \text{よって①が成り立つ。また、}$$

$AD = \frac{l}{2}AD$ より②が成り立つ。

更に勾股弦の定理(三平方の定理)より $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2}$ であるから③が成り立つ。

c_n は 2^2 角形の弦すなわち $\frac{\sqrt{2}}{2}$ とわかるから、 a_n, b_n, c_n は次々に求まっていく。

円周率の近似は $c_n \times 2^n$ (弦の数) である。この漸化式を用いてエクセルに $n=30$ まで計算させたものが以下の表である。

a_n	b_n	c_n	n	円周率の評価
			1	
		0.707106781	2	2.82842712474619
0.146446609	0.353553391	0.382683432	3	3.06146745892072
0.038060234	0.191341716	0.195090322	4	3.12144515225805
0.00960736	0.097545161	0.09801714	5	3.13654849054594
0.002407637	0.04900857	0.049067674	6	3.14033115695475
0.000602272	0.024533837	0.024541229	7	3.14127725093277
0.000150591	0.012270614	0.012271538	8	3.14151380114430
3.76491E-05	0.006135769	0.006135885	9	3.14157294036709
9.41236E-06	0.003067942	0.003067957	10	3.14158772527716
2.3531E-06	0.001533978	0.00153398	11	3.14159142151120
5.88274E-07	0.00076699	0.00076699	12	3.14159234557012
1.47069E-07	0.000383495	0.000383495	13	3.14159257658487
3.67671E-08	0.000191748	0.000191748	14	3.14159263433856
9.19179E-09	9.58738E-05	9.58738E-05	15	3.14159264877699
2.29795E-09	4.79369E-05	4.79369E-05	16	3.14159265238659
5.74487E-10	2.39684E-05	2.39684E-05	17	3.14159265328899
1.43622E-10	1.19842E-05	1.19842E-05	18	3.14159265351459
3.59054E-11	5.99211E-06	5.99211E-06	19	3.14159265357099
8.97638E-12	2.99606E-06	2.99606E-06	20	3.14159265358509
2.24409E-12	1.49803E-06	1.49803E-06	21	3.14159265358862
5.60996E-13	7.49014E-07	7.49014E-07	22	3.14159265358950
1.40221E-13	3.74507E-07	3.74507E-07	23	3.14159265358972
3.5083E-14	1.87254E-07	1.87254E-07	24	3.14159265358978
8.77076E-15	9.36268E-08	9.36268E-08	25	3.14159265358979
2.22045E-15	4.68134E-08	4.68134E-08	26	3.14159265358979
5.55112E-16	2.34067E-08	2.34067E-08	27	3.14159265358979
1.11022E-16	1.17033E-08	1.17033E-08	28	3.14159265358979
0	5.85167E-09	5.85167E-09	29	3.14159265358979
0	2.92584E-09	2.92584E-09	30	3.14159265358979

赤字の $2\sqrt{2}$ からどんどんと円周率に近づいていっていることがわかる。ただし、関孝和が 19 桁までを手計算でしていたのに対して、エクセルでは 15 桁までしか計算できなかった。関は 2^{17} (131072) 角形まで計算していた。下にあるのが $2^{15}, 2^{16}, 2^{17}$ 角形の計算した結果である。

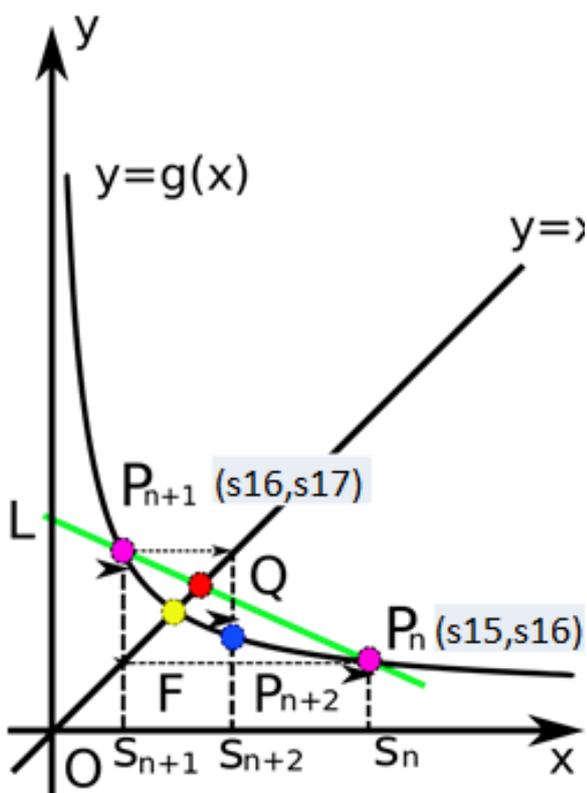
- $S_{15}=3.141592648776985\dots$ (8桁まで正しい)
 - $S_{16}=3.141592652386591\dots$ (9桁)
 - $S_{17}=3.141592653288992\dots$ (10桁)
- 3.1415926535897932384626433832795028841971693... (円周率)

このようにこの近似計算だけでは10桁までしか正しい値にたどり着けない。しかし関はこの漸化式を解き続けることはなく、17桁までの正しい値を求めている。では如何にしてもとめたのか？それを可能にしたのがエイトケンの $\Delta 2$ 乗加速法である。

(4) エイトケンの $\Delta 2$ 乗加速法 (増約術) について

エイトケンの $\Delta 2$ 乗加速法とは少ない計算で数列の収束を求める、計算を加速させる方法である。和算では増約術とよばれた。 $S_{15}, S_{16}, S_{17}\dots$ が等比数列をなしていると仮定した。そうすると数列 S_n は円周率の真の値に収束するはずである。

このことを図的に示したものが下のグラフである。



左のグラフにおいて $y=g(x)$ は s_n を s_{n+1} にかえる関数である。グラフは s_n が s_{n+1} を定め、 s_{n+1} が s_{n+2} を定めていく様子である。

数列の収束点は $y=g(x)$ と $y=x$ との交点となる。この交点の座標を求めるときに n を大きく増やしていけば確かに近づくことができる。

しかし s_n の定める p_n , s_{n+1} の定める p_{n+1} の交点 (赤色) を求めれば p_n よりも加速的に収束点 (黄色) にちかづくことが可能になる。

このことを用いて関は S_{15}, S_{16}, S_{17} からより精密な円周率を求め得た。

いま、 p_n , p_{n+1} の座標はそれぞれ $(s_{15}, s_{16}), (s_{16}, s_{17})$ となる。

この2点を通る式は

$$y = \frac{s_{17} - s_{16}}{s_{16} - s_{15}}(x - s_{15}) + s_{16}$$

となる。これと $y=x$ との交点が Q (赤丸) であるから、

y を消去すると

$$x = \frac{s_{17}-s_{16}}{s_{16}-s_{15}}(x - s_{15}) + s_{16}$$

これを x について解く。

$$x = \frac{s_{17}-s_{16}}{s_{16}-s_{15}}x - \frac{s_{15}(s_{17}-s_{16})}{s_{16}-s_{15}} + s_{16}$$

x について整理して $s_{16} - s_{15}$ をかけると

$$\{(s_{16} - s_{15}) - (s_{17} - s_{16})\}x = s_{17}(s_{16} - s_{15}) - s_{16}(s_{17} - s_{16})$$

$$x = \frac{s_{16}s_{16} - s_{15}s_{17}}{(s_{16}-s_{15}) - (s_{17}-s_{16})}$$

分子を分母にあわせてかくと

$$x = s_{16} + \frac{(s_{16}-s_{15})(s_{17}-s_{16})}{(s_{16}-s_{15}) - (s_{17}-s_{16})}$$

この式が関孝和が実際に使ったとされる式である。

エクセルで求めた値は桁数が足りないのでインターネットに書かれていた値を使って wolfram alpha に計算させた。

$$s_{15} = 3.1415926487769856708 \text{弱}$$

$$s_{16} = 3.1415926523865913571 \text{強}$$

$$s_{17} = 3.1415926532889927759 \text{弱}$$

ここにある弱は四捨五入で切り上げた数、強は切り捨てた数である。ちなみに 9 を切り上げると微弱、0 を切り捨てると微強となる。

この 3 つを用いると

$$\pi = 3.141592653589793247600005051$$

と確かに関孝和と同じように 17 桁まで正しい値を求めることが出来た。

ただ、関は著書の中では円周率を 3.14159265359 微弱としている。前述のとおり微弱は 9 を切り上げたいことを表すから末尾は 8 9 である。関は 17 桁まで正しい値をもとめていたが 13 桁までしか書かなかったのは四捨五入を計算のなかでたくさん行っており、13 桁までは確実に正しい値であると判断したからであるようである。この 17 桁というのは桁数の観点から見ると同年代のヨーロッパの数学者よりはるかに少ない。(1706, ジョン・マチン…100 桁、1719, トマス・ファンテ・ド・ラグニー…127 桁) しかし、エイトケンの $\Delta 2$ 乗加速法は、ヨーロッパでは関の発見から 200 年たってようやく再発見されているという事実を考えると、加速法を使って円周率を求めた関はやはり偉大な数学者だった。

4. 今後の課題

和算における円周率の研究は、関孝和の弟子建部賢弘が求めた 41 桁までですすんだ。建部は関が用いたエイトケンの $\Delta 2$ 乗加速法とはちがうリチャードソン加速（墨編増約術）を用いて計算したそうである。関孝和が $2^{17}(131072)$ 角形から 17 桁まで正しい値を求めたのに対して、建部は $2^{10}(1024)$ 角形から 42 桁まで求めた。このことから建部の用いた加速法のほうがより優れたものだったことがわかるが、それについては調べてはみたもののよく理解することが出来なかった。

また、和算を調べていくうちに洋算の便利さを実感することが出来た。関が作った傍書法であっても、和算家たちならセンスで解いていけたのかもしれないが、やはり現代使っている数学は扱いやすい。和算の欠点のところでもふれたが洋算は定義、証明、定理と論理が体系化されている。和算に限らずヨーロッパ以外の国にも伝統的な数学があったはずだが、今では世界共通でいわゆる洋算を使用している。和算を調べてみて洋算のどこが優れているのかいろいろな数学と比較してみたいと思った。

5. 参考文献

■本

- ・天才たちが愛した美しい公式（桜井進・中村義作著）
- ・算法勝負！「江戸の数学」に挑戦（山根誠司）
- ・和算で遊ぼう！—江戸時代の庶民の娯楽（佐藤健一）

■インターネット

- ・国立国会図書館 <http://www.ndl.go.jp/math/introduction.html>
- ・江戸の科学者列伝 <http://otonanokagaku.net/issue/edo/vol3/index.html>
- ・関孝和の円周率の計算 <http://www.cis.twcu.ac.jp/~osada/rims2008.pdf>
- ・開平法 http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/root.htm

・Wikipedia

エイトケンの $\Delta 2$ 乗加速法

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%A8%E3%82%A4%E3%83%88%E3%82%B1%E3%83%B3%E3%81%AE%CE%942%E4%B9%97%E5%8A%A0%E9%80%9F%E6%B3%95>

<http://www.wolframalpha.com/>

円周率の歴史

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%86%86%E5%91%A8%E7%8E%87%E3%81%AE%E6%AD%B4%E5%8F%B2>

折り紙と数学

5年C組 赤木 美穂

1. 要約

私は、折り紙と数学について調べた。その中で、折り紙の特徴である、正確な長さや角度を作ることができるという性質について、折り紙は折るだけで何等分にもできることを発見した。また、折り紙のたためる性質について、科学技術の分野で利用されていると知り、折り紙の利点について考察した。

キーワード：折り紙、等分、ミウラ折り

2. 探究の背景と目的

小さいころから折り紙が大好きだったので、折り紙について調べたいと思っていた。また、新聞で、人工衛星の太陽光パネルの折りたたみ方に折り紙の考え方が用いられているという記事を読んだのをきっかけに、折り紙の利点を自分なりに考察したいと考え、探究をはじめた。

3. 探究の内容

折り紙の利点をいくつか挙げ、その中でも、Ⅰ.正確な長さや角度を作ることができる、Ⅱ.たためる、という特徴について考察するため、実際に折り紙を折って性質を調べた。なお、探究に用いた折り紙はすべてダイソーの15cm×15cmのものである。

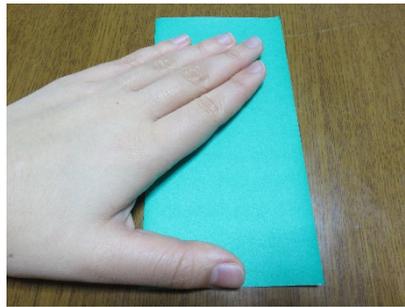
Ⅰ. 正確な長さや角度を作ることができる

(1) 角の三等分

折り紙の角を三等分する方法は多数あるが、その中でも有名な方法について、なぜ三等分になるのかを実際に折って確かめた。

<折り方>

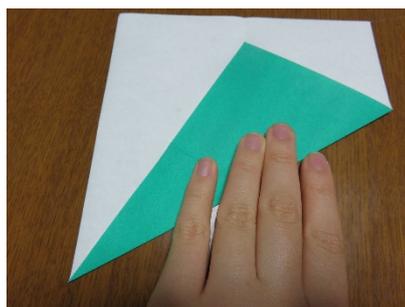
① 半分に折る。



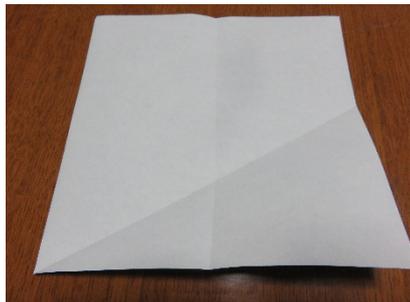
② 開く。



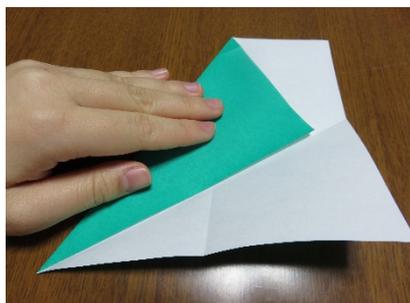
③ 角を折り目に合わせて折る。



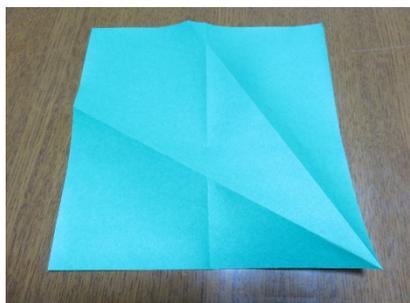
④ 開く。



⑤ 折り目に合わせて折る。



⑥ 完成



③において、図1のような三角形を考えると、角の三等分の折り目を作ることができたとわかる。

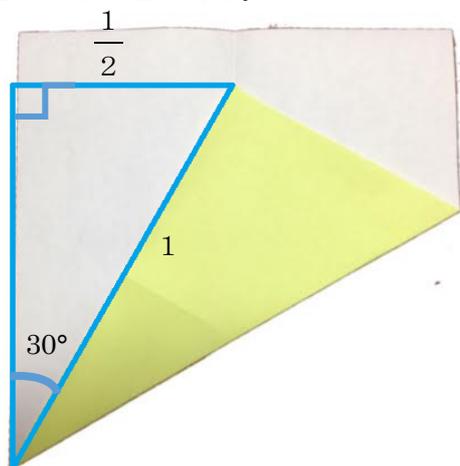


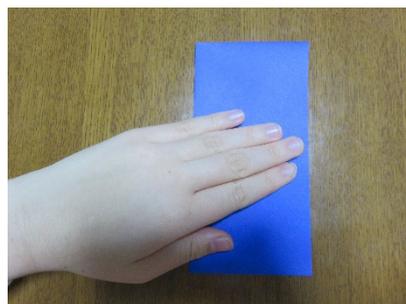
図1

(2) 辺の等分

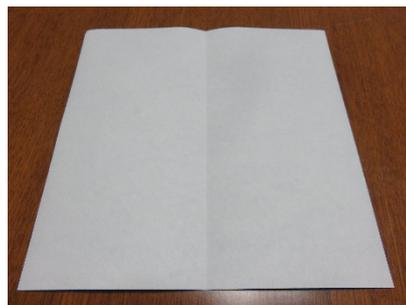
まず、有名な辺の三等分の方法について、なぜ三等分になるのかを実際に折って確かめた。

<折り方>

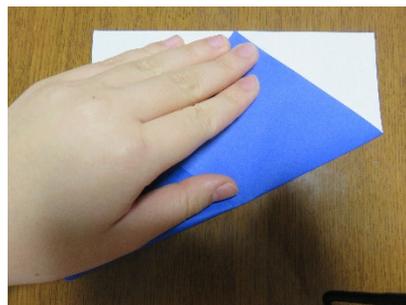
① 半分に折る



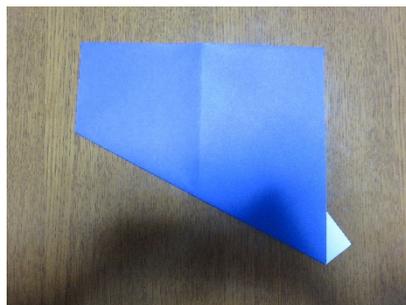
② 開く。



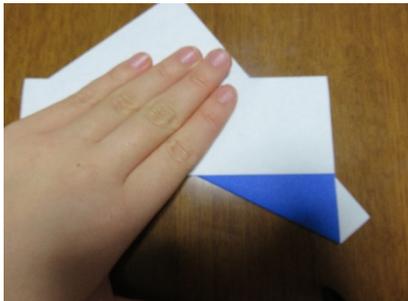
③ 角を折り目に合わせて折る。



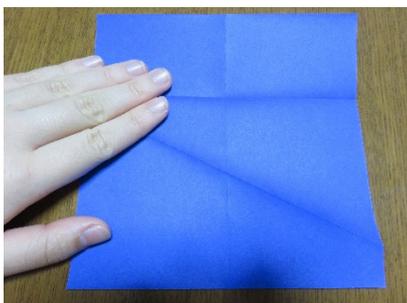
④ 裏返す。



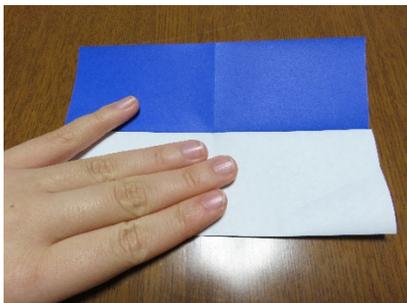
⑤ 交点に合わせて折る。



⑥ 開く。



⑦ 折り目に合わせて折る。



⑧ 完成



③において、図2のように、A~E とする。

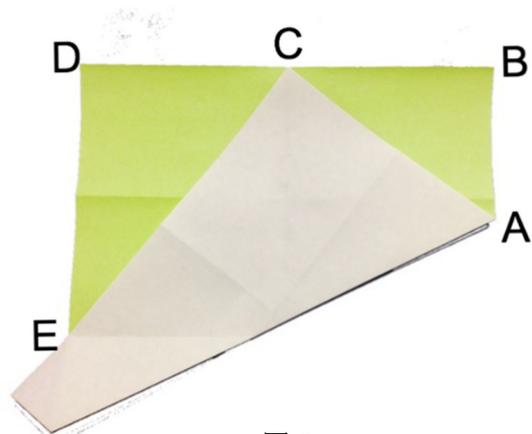


図 2

$AB=x, DE=y$ とすると、 $BA+AC=1$ より、

$$AC=1-x$$

三平方の定理より、

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$(1-x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2$$

$$\therefore x = \frac{3}{8}$$

$\triangle ABC$ の $\triangle CDE$ より、

$$AB:BC = CD:DE$$

であるから、

$$\frac{3}{8} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : y$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}$$

よって、DE を半分に折ることによって、三等分の折り目を作ることができたとわかる。

次に、辺の長さの $\frac{1}{2}$ の折り目から $\frac{1}{3}$ の折り目を作ることができたことから、私は次のような仮説を立てた。

<仮説>

辺の長さを $\frac{1}{n}$ にする折り目を用いて、辺の長さを $\frac{1}{n+1}$ にする折り目を作ることができる。

$\frac{2}{n+1}$ となる折り目を作ることができれば、 $\frac{1}{n+1}$ となる折り目も作ることができると考え、仮説を証明することにした。

(証明)

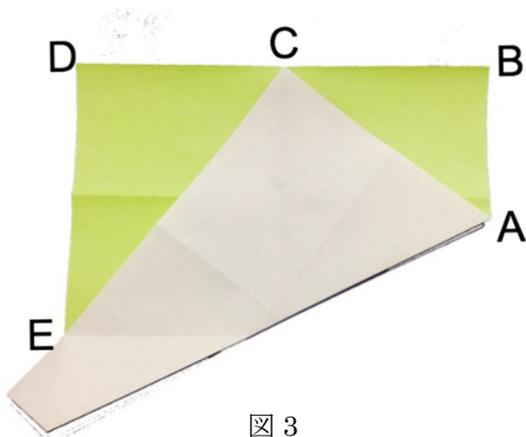


図 3

$BC = \frac{1}{n}$ のとき、三平方の定理より、

$$AB^2 + BC^2 = CA^2$$

よって、

$$AB^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = (1 - AB)^2$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} = \frac{n^2 - 1}{2n^2}$$

したがって、

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n^2 - 1}{2n^2}} = \frac{\frac{2n}{2n^2}}{\frac{n^2 - 1}{2n^2}} = \frac{2n}{n^2 - 1}$$

$\triangle ABC \sim \triangle CDE$ より、

$$\begin{aligned} DE &= CD \times \frac{BC}{AB} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \frac{2n}{n^2 - 1} \\ &= \frac{2n - 2}{n^2 - 1} = \frac{2(n - 1)}{(n + 1)(n - 1)} = \frac{2}{n + 1} \end{aligned}$$

よって、辺の長さの $\frac{1}{n}$ となる折り目を用いて $\frac{2}{n+1}$ となる折り目を作ること、 $\frac{1}{n+1}$ にする折り目をつくることができるとわかった。

折り紙を半分に折ることで $\frac{1}{2}$ の折り目を

作ることができるから、

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

の折り目も作ることができ、

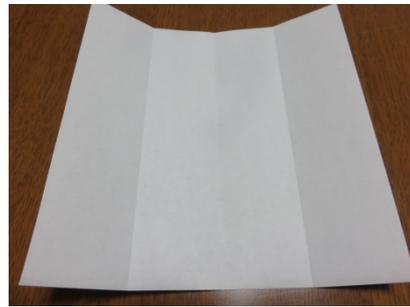
折り紙の辺の長さは折るだけで何等分にでもできるということがわかった。

下記に、この例を示す。

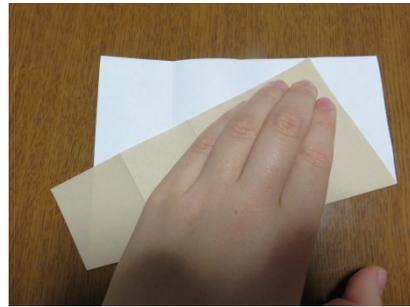
(例)

$\frac{1}{4}$ の折り目から $\frac{1}{5}$ の折り目を作る。

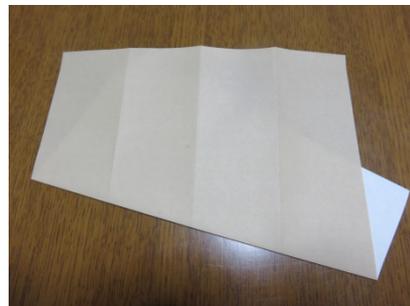
- ① 折り紙を 2 回半分に折り、 $\frac{1}{4}$ の折り目を作る。



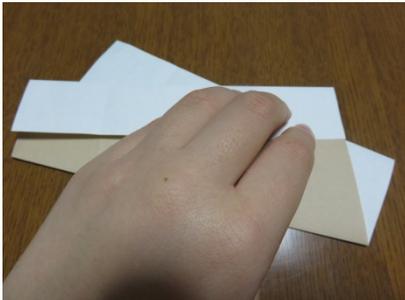
- ② 角を折り目に合わせて折る。



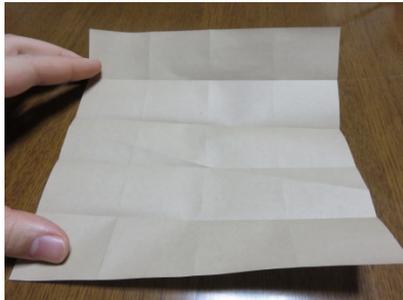
- ③ 裏返す。



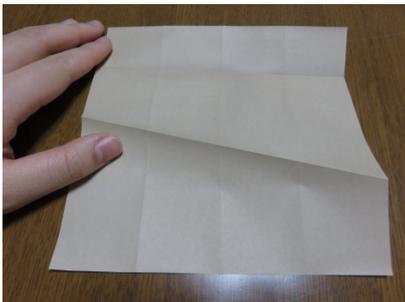
④ 折り目に合わせて折る。



⑧ 完成



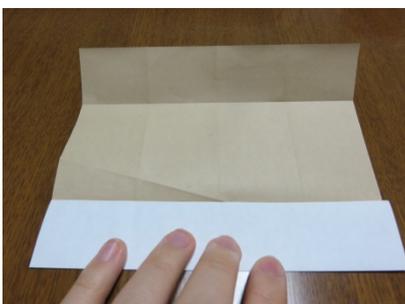
⑤ 開く。



⑥ 折り目に合わせて折る。



⑦ もう1度折る。



II. たためる

たたむと、小さくしたり薄くしたりすることができ、運びやすい、収納しやすいなど、便利な点が多い。よって、たためるという性質は、折り紙の最大の利点ではないかと考えた。

また、昔からよく折っていた「孔雀」の羽の部分に用いられている折り方が「ミウラ折り」と呼ばれるものであると知り、日常生活や科学技術に利用されているミウラ折りについて調べた。

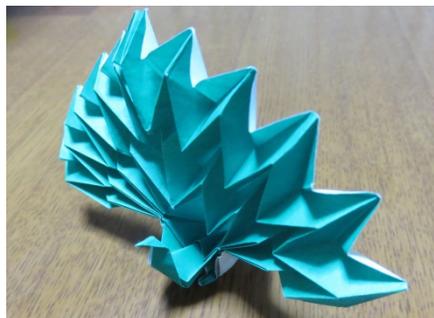


図4「孔雀」

(1) ミウラ折りについて

ミウラ折りとは、山折りと谷折りが交互に組み合わされることによって生み出される折り方である。

最も一般的な種類のミウラ折りは、角度を微妙にずらして折ることで力が加わりやすくなり、簡単に展開・収縮することができる。

人工衛星の太陽光パネルの展開方法を研究する過程で考案されたもので、地図や飲料缶など、さまざまなものに利用されている。

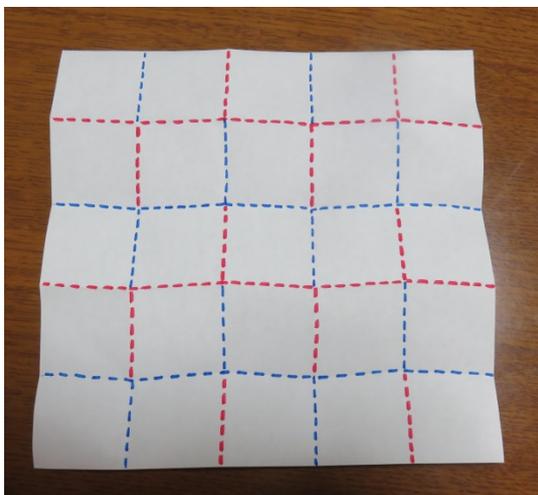


図5 一般的なミウラ折りの折り目
赤：山折り、青：谷折り

ミウラ折りには様々な種類がある。

折り紙の孔雀の羽の折り方は、向きの違うミウラ折りを直角に連結させたものである。



図6「孔雀」に使われている
ミウラ折り



図7「孔雀」に使われている
ミウラ折りの折り目
赤：山折り、青：谷折り

飲料缶に用いられているものは、ダイヤカット(吉村パターン)という別名がある。

飲料缶では、ダイヤカットにより、開封すると缶が縮むようにできており、外部からの混入物を検知するために用いられている。

実際に計測すると、開封前は 12.4cm であった缶の高さが開封後は 12.2cm になった。缶の表面はよりでこぼこになり、強度が増した。



図8 飲料缶に使われるダイヤカット
と KIRIN 氷結



図9 飲料缶に使われる
ダイヤカットの折り目
赤：山折り、青：谷折り

このように多様な面で利用されているミウラ折りの特徴を知るため、実際に折って実験をした。

<実験1>

ミウラ折りとミウラ折りでないものを比較する。

ミウラ折りは、最も一般的な種類のものを、ミウラ折りでないものは、ミウラ折りでは角度をずらして折る部分をずらさずに折ったものを折り、たたみやすさに注目して実験した。



図10 ミウラ折り

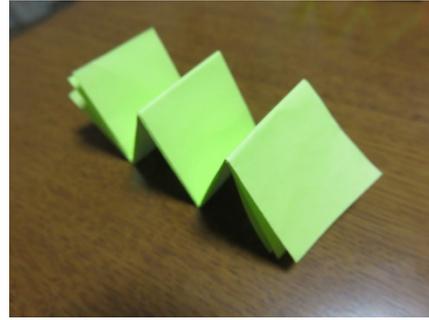
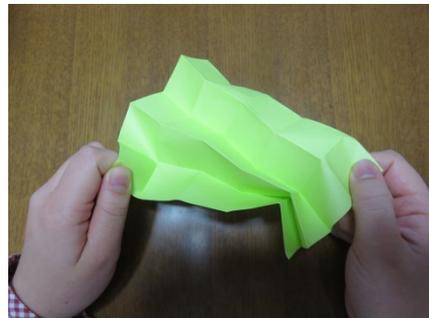
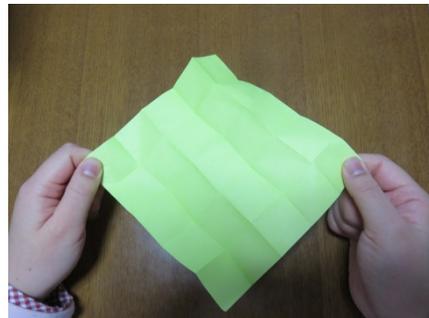


図11 ミウラ折りでないもの

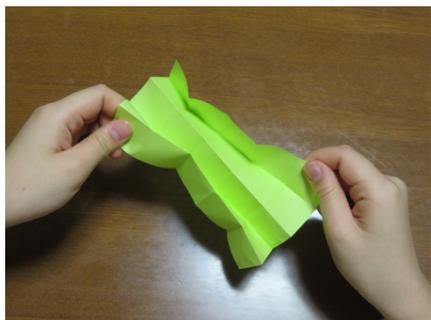
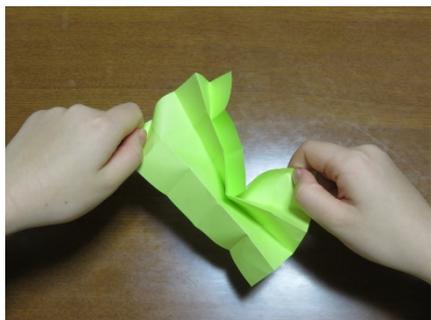
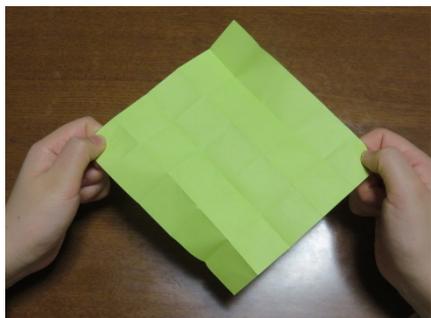
<結果1>

- ・ミウラ折りである物は



簡単に収納・展開できた。
山折りと谷折りの入れ替わりが起こりにくく、とてもたたみやすい。

・ミウラ折りでないものは



スムーズに折りたたむことができない。
途中で山折りと谷折りが入れ替わることがあり、たたみにくい。

<実験 2>

ミウラ折り(「孔雀」の羽に使われているもの)と、普通の蛇腹折りを比較する。ただし、どちらも折り紙の辺の長さを 16 分の 1 にする折り目を用いて折った。

<結果 2>



図 12 2つの比較

	ミウラ折り	蛇腹折り
長さ	11.8cm	15.0cm
厚さ	32枚	32枚
強度	強い	弱い
たたみやすさ	たたみやすい	たたみにくい

表 1 性質のまとめ

図 12、表 1 のように、ミウラ折りと蛇腹折りを比較すると、同じ厚さでも、ミウラ折りのほうがより理にかなった折りたたみ方であると言える。

<実験 3>

最も一般的な種類のミウラ折りの角度をずらして折るが、その角度の大きさが何度でもミウラ折りを折ることができるのかを確かめる。ずらす角度を 30°、45°、60° にしてミウラ折りを折り、比較した。



図 13 30° ずらしたもの



図 14 45° ずらしたもの



図 15 60° ずらしたもの

<結果 3>

どのような角度でずらしても、ミウラ折りを折ることはできた。しかし、ずらす角度が小さいほうが、よりコンパクトにたたむことができた。また、ずらす角度が小さいほうがたたみやすいと感じた。

実験の結果から、ミウラ折りの特徴として、

- ・簡単に展開・収縮できる。
- ・山折りと谷折りが入れ替わりにくく、折りたたみやすい。
- ・小さく、かつ強度を増して折りたたむことができる。
- ・ずらす角度は何度でもよいが、あまりずらさないほうが便利である。

ということを確認できた。

4. 今後の課題

- ・今回は辺の長さの等分について考えたが、角を等分するための法則があるのかどうかを考察したい。
- ・正方形の紙だけでなく、長方形でも成り立つのかを考察したい。
- ・一般的なミウラ折りについて、何度ずらしたものが最もたたみやすいのかを考察したい。

5. 参考文献

- ・本格折り紙（前川淳・著、日貿出版社）
- ・はじめての多面体おりがみ（川村みゆき・著、日本ヴォーグ社）
- ・ミウラ折り-Wikipedia
<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%9F%E3%82%A6%E3%83%A9%E6%8A%98%E3%82%8A>
- ・

6. 謝辞

この探究にあたりまして、吉田先生には多大なご指導を賜りました。ありがとうございました。

フィボナッチ数と黄金比

5年C組 富永貴子

1. 要約

自然界において特別な存在である、フィボナッチ数がどういったものなのか調べた。調べていくうちに、黄金比の話にも入る事ができたため、その二つの繋がりについて調べていった。

キーワード:フィボナッチ数、黄金比 ϕ

2. 研究の背景と目的

研究しようと決めたきっかけは、板チョコを割って並び替えるだけでチョコが1かけら増える動画を見て、「これは何か数学につながるか」と思っていたところ、フィボナッチ数の面積においても同じような現象が起きるパラドクスを見つけたからだ。

また、小学生の頃「算数研究・街角の算数」という授業でフィボナッチ数の存在を知ったのだが、その頃あまりにも理解できず、ふと思い出すたび気になっていた為、今回の機会を利用して研究しようと思ったからだ。

3. 研究の内容

(3-1)フィボナッチ数とは

$\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots \rangle$ のように隣り合った数の和が次の項になる数列のことである。

ここで、一般項を求める。フィボナッチ数の一般項を F_n とすると

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

これは3項間漸化式だから

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0 \text{ と変形して}$$

$$F_{n+2} - \alpha F_{n+1} = \beta (F_{n+1} - \alpha F_n) \text{ より}$$

$$F_{n+2} - (\alpha + \beta)F_{n+1} + \alpha\beta F_n = 0 \text{ と比較すると}$$

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1 \text{ とわかる。}$$

この α 、 β は解と係数の関係から

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ の2つの解より}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ となり、} \alpha, \beta \text{ を求められる。これを代入すると、}$$

$$F_{n+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_{n+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(F_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_n\right) \dots \dots \textcircled{1}$$

$$F_{n+2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_{n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(F_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n\right) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

よって、

①より、数列 $\{F_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_n\}$ は公比 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} F_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_n &= \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\left(F_2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_1\right) \\ &= \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\left(1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \times 0\right) \\ &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

……③

また、②より数列 $\{F_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n\}$ は公比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} F_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n &= \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\left(F_2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_1\right) \\ &= \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \times 0\right) \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

……④

④-③より

$$\begin{aligned} \left(F_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n\right) - \left(F_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_n\right) &= \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) \\ \sqrt{5}F_n &= \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) \\ F_n &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

よって、一般項は $F_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)$ と表せる。

この数列は、自然において重要な役割を果たしている。また、この数列自体、自然を調べているうちに発見された。自然界では、成長のしるしとして存在している。たとえば種子の数などだ。中央から外に向かって球状のように成長する。



(例えば、モモやサクランボの種子)

しかし、パイナップルには6角形の種子が付いていて、しかも表面を覆うように螺旋上に並んでいる。そのおかげで、パイナップルの種子は偏りなく全てがほぼ均等になるように成長できる。つまり、全ての誕生した種子に対して未熟になってしまうことを最小限にしている、これは子孫繁栄のためにはもっとも合理的だと言える。そして、その螺旋の並びにフィボナッチ数が存在する。

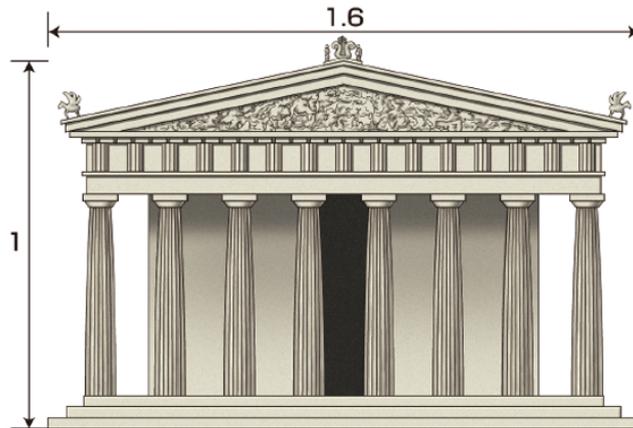
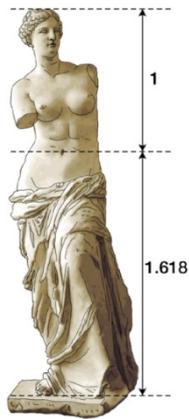


(線を引いた向きに3種類の螺旋がある。)

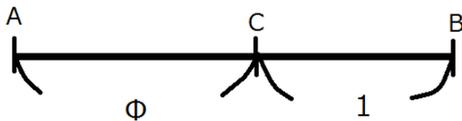
ほかにも、ウサギの繁殖の仕方や、けやきの枝の生え方、植物の葉の生え方にもフィボナッチ数がみられる。

(3-2)黄金比

黄金比とは、数の世界で美に大きく関わると言われている定数 ϕ のこと。この黄金比は様々な芸術作品に用いられている。たとえば、ミロのビーナスや、パルテノン神殿、ピラミッド。また、身近なものだと名刺やクレジットカードなど。調べたところ、古代ギリシヤのペディウスという彫刻家が発見したそうだ。



線分 AB 間において、 $AB:AC=AC:CB$ となるように点 C を取る。また、今回は $BC=1$ とする時、線分 AC 間の長さが ϕ となるのを利用する。

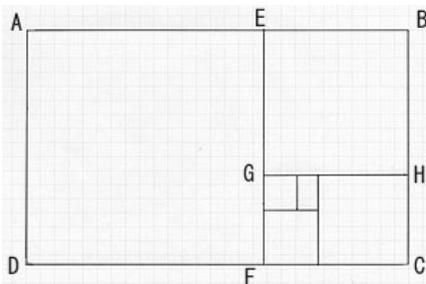


$\phi+1:\phi=\phi:1$ なので、 $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ と表せる。

つまり、解の公式より $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

また、 ϕ は正の数より $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618\dots$ と ϕ の値を求めることができる。

次に、黄金長方形とは、 $1 \times \phi$ の長方形のことである。その長方形の中に正方形ができるように線分を引くと同時に長方形もできる。そして、全ての正方形、黄金長方形は相似である。つまり、黄金長方形とはそこから最大の正方形を取っても、もう片方が必ず黄金長方形になる図形だとわかる。要するに、黄金長方形には入れ子のように無限の長方形が入っている。



この性質は、 ϕ に関わる式や図形に共通する。

最初に式について示す。

(i)

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$ より、

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \text{ となる}$$

つまり、

φ は 1 に φ の逆数を足したもの

という等式が成り立つ

φ に $1 + \frac{1}{\varphi}$ を代入すると、

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}$$

さらに続けると、

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

これより、図形と同様に入れ子になっていることがわかる。

(ii)

$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ より、

$$\varphi = \sqrt{1 + \varphi} \text{ となる}$$

つまり、

φ は 1 に φ を足して平方根をとったもの

という等式が成り立つ

φ に $\sqrt{1 + \varphi}$ を代入すると、

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}}$$

さらに続けると、

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

やはり、(i)と同様に入れ子構造になっている。

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \text{ これを利用して、}$$

$1, 1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$ と続けていくと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= 1 \\ \frac{2}{1} &= 2 \\ \frac{3}{2} &= 1.5 \end{aligned}$$

$$\frac{5}{3} = 1.66 \dots$$

$$\frac{8}{5} = 1.6$$

$$\frac{13}{8} = 1.625$$

$$\frac{21}{13} = 1.61538 \dots$$

$$\frac{34}{21} = 1.61904 \dots$$

$$\frac{55}{34} = 1.61764 \dots$$

$$\frac{89}{55} = 1.61818 \dots$$

$$\frac{144}{89} = 1.61797 \dots$$

$$\frac{233}{144} = 1.61805 \dots$$

この比は、徐々に $\phi = 1.618\dots$ の値に近付いている事がわかる。また、分母を見ると 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots となっている。つまり、隣り合うフィボナッチ数列の比は大きくなるにつれて、 ϕ に近付いていく。

つまり、黄金比 ϕ とフィボナッチ数、美しさの裏の 2 つの数学的要因は、実は繋がっている

$$F_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) \quad \text{と表した一般式は、黄金比 } \phi \left(\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ を用いて}$$

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} \quad \text{と表すことができる}$$

4. 今後の課題

今回私はフィボナッチ数と黄金比の関係を調べた。それぞれ単体の内容と、その二つの共通点を繋げることができた。ただ、これらは既知のことであり、何の新しさも無かったというのが心残りである。ここから話を膨らまして人の感情や美に対する感覚を科学的に調べることができれば、より面白いと思い発表後「感覚」について調べてみた。しかし、「感覚とは何か」という定義しか分からなかった。そのため、私の今の段階では「どうして黄金比が美しく感じるのか」という疑問には、「美しいとされている黄金比を使った物が多く私たちの身の回りに存在するため、普段頻繁に目にするものに近い形に対して心が安心し、美しいと感じるのだろう」という曖昧な推測しかできない。また、文化によって違うのか古代ギリシャなどヨーロッパでは黄金比、日本の寺院には白銀比が利用されていてその違いが生まれた歴史などを調べたいと思った。今後、人間の感覚を少しでも科学的に解明できるようにしたいと思った。

また、隣り合うフィボナッチ数列の比が黄金比 $\phi = 1.618\dots$ の値に収束することを、今学習している等比級数で求められるため証明したい。

5. 参考文献

- ・ 結城浩(2007) 数学ガール ソフトバンク クリエイティブ株式会社
- ・ 富永裕久 (2013) 美しく感動する数の教室 株式会社 PHP エディターズ・グループ
- ・ スコット・オルセン 藤田優里子(訳) (2009) 黄金比 自然と芸術にひそむもっとも不思議な数の話 株式会社 創元社
- ・ <http://www.fbs.osaka-u.ac.jp/labs/skondo/saibokogaku/fibonacci.html>
- ・ <http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%82%A3%E3%83%9C%E3%83%8A%E3%83%83%E3%83%81%E6%95%B0>

統計学的見地から見たイチローと松井秀喜

5年C組 延江 一志

1. 要約

セイバーメトリクスと言われる、野球において統計学的見地から選手を分析する手法を使って、イチローと松井秀喜という日本が誇る野手二人を評価した。

キーワード：セイバーメトリクス

2. 探究の背景と目的

野球という競技は、サッカーなどとは異なり流動的な競技ではなく、様々な種類のデータが集まりやすい。また、個人的に野球は好きな競技であったため、数多くのデータからそれぞれの選手を比較することが可能ではないか、という考えに行きついた。そこで、今回は、野球の最高峰の舞台であるアメリカ、メジャーリーグで活躍した日本人二人を主に取り上げ、評価し、比較することにした。

3. 探究の内容

① セイバーメトリクスとは

そもそもセイバーメトリクス (**SABRmetrics, Sabermetrics**) とは、野球ライターで野球史研究家・野球統計の専門家でもあるビル・ジェームズによって1970年代に提唱されたものであり、アメリカ野球学会の略称 SABR (Society for American Baseball Research) と測定基準 (metrics) を組み合わせた造語である。野球には、様々な価値基準や指標が存在する。セイバーメトリクスではこれらの重要性について客観的に分析し、そうすることで野球の采配に統計学的な根拠を与えようとした。しかし、それは野球の「常識」であった送りバントや盗塁の効力を否定するものであったことから、「野球は人間がプレイするものであってデータがするものではない」という野球哲学を持つ人々からはあまり歓迎されていない。

② 「イチロー」「松井秀喜」両選手の比較

考察の仕方については多種多様な方法が存在するが、今回は両選手の2004年の打撃成績を用いて分析を行った。

まず、イチローと松井秀喜が2004年に所属していたチームでどのような役割を果たしていたか、という点について考えてみる。

イチローは2004年、シアトル・マリナーズの1番打者として主に出場していた。1番打者は出塁し、本塁に返ってくることが打撃において第一の役割である。また、松井はニューヨーク・ヤンキースの4番打者であった。4番打者は、塁上にいるランナーを本塁に返すことが第一の役割である。したがって、二塁打や本塁打などの長打をたくさん打ち、たくさんのランナーを本塁に返すことを期待されている。

表1

	打数	得点	ヒット	二塁打	三塁打	本塁打	打点	四球	死球
イチロー	704	101	262	24	5	8	60	49	4
松井秀喜	584	109	174	34	2	31	108	88	3
三振	盗塁	盗塁死	打率	出塁率	長打率	OPS			
63	36	11	0.372	0.414	0.455	0.869			
103	3	0	0.298	0.39	0.522	0.912			

表1は、2人の選手の2004年シーズンの打撃成績をまとめたものである。イチローは、262本と数多くのヒットを放っているが、二塁打、本塁打の数はそれに比べて少なく、四球の数も打数と比べて少ない。したがってイチローは短距離打者であるといえる。それに比べて松井はヒットの数は174本と、この年シーズン安打数 MLB 歴代最高記録を塗り替えたイチローにははるかに及ばないが、二塁打、本塁打の数がそれぞれ34本、31本と多く、また四球も88個と多い。したがって松井は長距離打者というにふさわしいだろう。

今回の考察では、イチローと松井のヒットを、攻撃の最大の目標である得点産出においてチームに提供した価値について比較する。

③何を評価すべきか

チームの攻撃において第一の目的は得点することである。したがって、得点産出のために打者がどれだけ役割を果たしたかを評価するのが最良である。

また、打撃プレイの数、例えばアウト数や一塁打～本塁打までの数だけでは、それらのプレイの結果どれだけ得点が産出されたかは直接的には評価不可能である。

打撃プレイにおいて、その時の状況は重要である。例えば一塁打という打撃プレイの価値は、その場における塁 - アウト状況(3*8=24 通り)に依存する。ツーアウト満塁での一塁打は、ノーアウト走者なしでの一塁打より価値がある。

この塁 - アウト状況を考慮することで、得点産出という目的に対するそれぞれの打撃プレイの価値を決めることができ、全ての打者について、全ての打撃プレイの価値を決めることができる。全てのプレイの価値を合わせると、選手の打撃成績を比較するために用いることができる。

④得点見込み表

50年ほど前、ジョージ・リンゼイが MLB の得点産出について研究を行った。1959～60年シーズンにおけるゲームから、そのイニングの残りに上げる得点数を算出した。この時リンゼイは、アウトカウント、埋まった塁という二つの項目に注目した。アウトカウントはノーアウト、1アウト、2アウトの3つのアウトの数、塁は一・二・三塁のそれぞれの塁にランナーがいるかどうか

かという 8 つの出塁状況があるため、アウトカウントと埋まった塁による状況は $3 \times 8 = 24$ 通り起こりえる。この 24 のそれぞれの状況について、リンゼイはそのイニングの残りに挙げた得点の数を調べた。

今回使う得点見込み表は、2002 年シーズンのものである(表 2)

表 2

	埋まった塁							
	なし	一塁	二塁	三塁	一・二塁	一・三塁	二・三塁	満塁
ノーアウト	0.511	0.896	1.142	1.405	1.511	1.838	1.956	2.332
1アウト	0.272	0.536	0.682	0.944	0.936	1.185	1.358	1.51
2アウト	0.101	0.227	0.322	0.363	0.45	0.524	0.633	0.776

⑤考え方

得点見込み表は、打撃プレイの価値を一つ一つ分析するのにとても役立つ。例えば、イチローが 1 アウトランナー・二塁で一塁打を打ったとする。

一塁打を打つ「プレイ前」での得点見込みは

$$R(1 \text{ アウトランナー} \cdot \text{二塁}) = 0.936$$

イチローが一塁打を打ち、仮にそれぞれの走者が 2 つ進塁する、とすると「プレイ後」の得点見込みは

$$R(1 \text{ アウトランナー} \cdot \text{三塁}) = 1.185$$

この一塁打の価値は、以下のように算出する。

$$R(\text{「プレイ後」}) - R(\text{「プレイ前」}) + \text{得点数}$$

このプレイで 1 得点したので、この一塁打の価値は、

$$\text{価値} = 1.185 - 0.936 + 1 = 1.249$$

したがって、この一塁打はチームにとって約 1.25 点の価値があるといえる。

これが仮に 2 アウト走者なしならば

- ・「プレイ前」の得点見込み $\Rightarrow 0.101$ 点
- ・「プレイ後」(2 アウト走者一塁) $\Rightarrow 0.227$ 点
- ・このプレイでの得点は 0 点である

したがって

$$\text{価値} = 0.227 - 0.101 + 0 = 0.126$$

よって、この一塁打の価値は約 0.1 点の価値しかない。

このように、得点見込み表は塁-アウト状況ごとに各打撃プレイの価値を計ることができる。この計算ではランナーの進塁も考える必要があるなので、簡単な想定をしてみた。

- ・ 走者は一塁打で2つ進む（一塁→三塁、二塁・三塁→ホーム）
- ・ 二塁打、三塁打では全ての走者がホームに戻る
- ・ ダブルプレーなどのアウトは考えない。打撃プレイにおけるアウトは全て打者のみのアウトとなる

これらは完全に正確ではないが、この想定は各選手に平等なので、各選手の価値は、この想定にはほとんど影響を受けない。

得点見込み表にこれらの想定をあてはめると、表 3～8 のような表ができる。

表3

アウトの価値		埋まった塁						
	なし	一塁	二塁	三塁	一・二塁	一・三塁	二・三塁	満塁
ノーアウト	-0.24	-0.36	-0.46	-0.46	-0.58	-0.65	-0.6	-0.82
1アウト	-0.17	-0.31	-0.36	-0.58	-0.49	-0.66	-0.72	-0.73
2アウト	-0.1	-0.23	-0.32	-0.36	-0.45	-0.52	-0.63	-0.78

表4

四死球の価値		埋まった塁						
	なし	一塁	二塁	三塁	一・二塁	一・三塁	二・三塁	満塁
ノーアウト	0.38	0.62	0.37	0.43	0.82	0.49	0.38	1
1アウト	0.26	0.4	0.25	0.24	0.57	0.32	0.15	1
2アウト	0.13	0.22	0.13	0.16	0.33	0.25	0.14	1

表5

一塁打の価値		埋まった塁						
	なし	一塁	二塁	三塁	一・二塁	一・三塁	二・三塁	満塁
ノーアウト	0.38	0.94	0.75	0.49	1.33	1	0.94	1.51
1アウト	0.26	0.65	0.85	0.59	1.25	1	1.18	1.68
2アウト	0.13	0.3	0.91	0.86	1.07	1	1.59	1.75

表6

二塁打の価値								
	埋まった塁							
	なし	一塁	二塁	三塁	一・二塁	一・三塁	二・三塁	満塁
ノーアウト	0.63	1.25	1	0.74	1.63	1.3	1.19	1.81
1アウト	0.41	1.15	1	0.74	1.75	1.5	1.32	2.17
2アウト	0.22	1.1	1	0.96	1.87	1.8	1.69	2.55

表7

三塁打の価値								
	埋まった塁							
	なし	一塁	二塁	三塁	一・二塁	一・三塁	二・三塁	満塁
ノーアウト	0.89	1.51	1.26	1	1.89	1.57	1.45	2.07
1アウト	0.67	1.41	1.16	1	2.01	1.76	1.59	2.43
2アウト	0.26	1.14	1.04	1	1.91	1.84	1.73	2.59

表8

ホームランの価値								
	埋まった塁							
	なし	一塁	二塁	三塁	一・二塁	一・三塁	二・三塁	満塁
ノーアウト	1	1.62	1.37	1.11	2	1.67	1.56	2.18
1アウト	1	1.74	1.59	1.33	2.34	2.09	1.91	2.76
2アウト	1	1.87	1.78	1.74	2.65	2.58	2.49	3.32

⑥2人の選手の評価

選手の打撃成績を評価するには、まずその選手の塁 - アウト状況で打撃結果を分類し、評価する。

塁 - アウト状況で分類された選手の打撃結果は、BASEBALL-REFERENCE.COMに掲載されており、イチロー、松井両選手のものももちろん掲載されている。そこで、私はこの両選手の打撃結果を塁 - アウト状況別にアウト～本塁打まで仕分けし、⑤の考え方により両選手の全ての打撃プレイの得点価値を算出し、表 9,10 にまとめた

表9

	合計	アウト	四死球	一塁打	二塁打	三塁打	ホームラン
イチロー	757	442	53	225	24	5	8
平均=0.05	39.9	-115.6	14	107.9	19.3	6.3	8

表10

松井	675	410	91	107	34	2	31
平均=0.07	50.1	-121	32.3	62.8	30.3	1.9	43.9

イチローは 757 打席で 39.9 点の得点価値をチームにもたらした。したがって一打席平均で約 0.05 点の得点価値をチームにもたらしている。一方松井は 675 打席で 50.1 点の得点価値、一打席あたり平均で 0.07 点の得点価値をチームにもたらした。このことより、松井は得点への貢献度がより高い打者であったように見える。

イチローと松井の成績をよく理解するため、2004 年シーズン主に三・四番に座っていた打者たちと比較を行ってみる。

表11

	合計	アウト	四死球	一塁打	二塁打	三塁打	ホームラン
イチロー	757	442	53	225	24	5	8
平均=0.05	39.9	-115.6	14	107.9	19.3	6.3	8
松井秀喜	675	410	91	107	34	2	31
平均=0.07	50.1	-121	32.3	62.8	30.3	1.9	43.9
アヴレウ	706	401	132	95	47	1	30
平均=0.09	63.5	-107.5	39.2	51	37.9	1.2	41.8
ボンズ	614	238	241	60	27	3	45
平均=0.21	130.4	-61	75.3	30.7	21.5	2.4	61.6
プホルス	683	396	91	97	51	2	46
平均=0.11	77.1	-108.1	27.1	52.4	42.5	1.9	61.3
シェーフィールド	676	407	103	99	30	1	36
平均=0.08	52.2	-116.9	31.8	58.4	27.2	1	50.6
トーマー	614	369	106	68	28	1	42
平均=0.06	39.4	-112.4	32.3	34.3	24.1	1.2	59.9

ジム・トーマーを除く 5 人の外国人選手はイチローよりも合計点が多い。2004 年シーズンのトーマーは他のシーズンに比べてあまり成績が芳しくないということも考慮すべきである。また、松井秀喜の打撃成績はアヴレウ、ボンズ、プホルス、シェーフィールドに近いものがあるが、アヴレウ、ボンズ、プホルスらの成績には及ばない。

先ほどの表 11 では他の三・四番選手とイチロー、松井両選手を比較したが、松井は四番打者なので正当な比較といえるが、イチローは一番打者であり、打席に回ってくる時の状況が異なるので不公平だ、と考えた。そこで、2004 年シーズン一番打者として主力の選手であったイチローを含む 19 人の選手のデータをまとめた。

表12

		合計	アウト	四死球	一塁打	二塁打	三塁打	ホームラン
イチロー	SEA	757	442	53	225	24	5	8
平均=0.05		39.9	-115.6	14	107.9	19.3	6.3	8
バロウズ	SD	563	367	40	128	23	3	2
平均=0.01		5	-97.4	13.9	67.2	15.9	3	2.3
クローフォード	TB	662	441	36	129	26	19	11
平均=0.01		8.6	-115.7	11.6	63.7	16.1	18.8	14
デimon	BOS	699	432	78	128	35	6	20
平均=0.06		43.1	-120.6	27	70.9	31.8	9.2	24.8
ダーラム	SF	534	338	63	80	28	8	17
平均=0.05		25.6	-90.6	22.1	39.5	24.3	9.9	20.4
エクスタイン	LAA	621	410	55	129	24	1	2
平均=-0.02		-10.6	-115	20.2	61.8	19.7	0.6	2
フリール	CIN	584	365	79	108	21	8	3
平均=0.01		4	-100.5	28.2	52.5	14.7	6	3
フルカル	ATL	622	406	59	114	24	5	14
平均=0.02		10.5	-109.2	21.3	53.6	19.6	6.4	18.8
イズタリス	LAD	713	477	43	148	32	9	4
平均=0.00		-1	-127.8	13.7	74.5	24.9	7.2	6.6
ケンドール	PIT	653	391	79	148	21	0	3
平均=0.04		23.2	-100.3	27.1	39.8	21.3	0	5.4
コツツェー	OAK	663	416	57	135	37	3	15
平均=0.03		18.3	-112.5	19	66.6	25	3.2	17
マイルズ	COL	553	369	31	129	15	3	6
平均=0.00		1.6	-97.4	10.9	66.7	11.5	2	7.9
ピエーレ	FLA	728	457	48	184	22	12	3
平均=0.02		11.6	-114.9	15.7	77.4	17	12.9	3.6
ボドセドニック	MIL	705	484	65	110	27	7	12
平均=-0.03		-19.2	-126.7	20.2	46.8	18.6	5.9	16.1
ロバーツ	BAL	713	466	72	119	50	2	4
平均=0.01		7.4	-122.6	25.7	57.1	37.8	2.8	6.7
ロリンズ	PHI	717	467	60	121	43	12	14
平均=0.04		26	-121.1	20.6	61.9	33.9	12	18.8
ウィルカーソン	WAS	682	426	110	73	39	2	32
平均=0.03		22.3	-112.4	34.8	38.6	22.9	1.9	36.6
ウォマック	STL	592	383	39	140	22	3	5
平均=0.00		-2.1	-103.4	12.9	65.7	14.3	2.5	5.9
ヤング	TEX	735	474	45	152	33	9	22
平均=0.04		32.8	-128.3	14.3	80.2	24.1	11.5	31.1

イチローよりも合計点が高いのはデimon一人だが、そのデimonの産出した得点価値の合計に肉薄しているのはイチロー一人であり、イチローと同水準の成績を持つのもダーラム一人である。

⑦まとめ

- ・攻撃時に点を取る、という最終目的に向けた打撃プレイを比較するときに、単純に安打数、本塁打数などを比較しても価値がない
- ・松井の方がイチローより打席数が少ないが、松井はイチローより多くの得点を稼いでいる。これは、松井が得点圏にランナーがいるときに打席に立つことが多く、また、長打が多いためである
- ・イチローの一打席あたりの価値は、3・4番の打者たちにくらべると低いが、1番打者の中では最高の選手の一人と言える

4. 今後の課題

得点見込み表を用いれば、盗塁、送りバントなどの戦術についても分析・評価することは可能である。が、盗塁を比較するとき、単独盗塁であれば $R(\text{「プレイ後」}) - R(\text{「プレイ前」}) + \text{得点数}$ の式で比較することが可能だが、ダブルスチールなど、複数のランナーが一斉に盗塁する際、どのランナーがどれだけの得点価値をチームにもたらしたかは判断できない。そういった得点見込み表の欠点を埋める方法がないかどうかを模索するのが、今後の課題である。

5. 参考文献

メジャーリーグの数理科学上・下 丸善出版

6. 参考 URL

BASEBALL-REFERENCE.COM

<http://www.baseball-reference.com/players/split.cgi?id=suzukic01&year=2004&t=b>

<http://www.baseball-reference.com/players/split.cgi?id=matsuhi01&year=2004&t=b>

特別編 セイバーメトリックス (セイバーメトリックス)

<http://www.h4.dion.ne.jp/~p-taka/gijyutu/tokubetsu8.htm>

LADy SCIENCE BOOKLET 2
文化としての数学を 生徒論文集

2015年3月27日発行

奈良女子大学 理系女性教育開発共同機構

CORE of STEM

Collaborative Organization for Research in women's Education of
Science, Technology, Engineering, and Mathematics

〒630-8506 奈良市北魚屋東町

コラボレーションセンター Z207

TEL.&FAX 0742-20-3266

ladyscience@cc.nara-wu.ac.jp
