Collaborative Organization for Research in women's Education of Science, Technology, Engineering, and Mathematics

CORE of STEM

科学の言語としての数学

自然の中の数学 3

2017年10月24日(火)　10：40〜12：10

吉田信也(全学共通)

1. 黄金比は美しい？

［課題13］
次のWebページは，日本テレビ(NTV)の「世界一受けたい授業」で行われた授業の，復習コーナーである。この内容について，グループで議論して疑問や意見をまとめよ。
［貴方・グループの疑問・意見］

フィボナッチ数列の法則に従ったひまわりの種の右回りの渦の数と左回りの渦の数の比率は、だいたい1：1.618になり、この比率は**「黄金比」**とも呼ばれ、様々なところに登場します。
自然の中は**「1：1.618」の黄金比**が潜んでいます。

例えばオウム貝。
この貝は、半分に切ると中身は画像のようになっています。この画像のように向かい合った次の辺と長さを比べると、黄金比になっています。

さらにみなさんが目にする美しいと思われるものには、黄金比が潜んでいる事があります。

例えば、モナリザ。モナリザの顔は、顔の輪郭に沿って接線を引く、そしてそのたてと横の直線の長さ。
ミロのビーナスは、頭からおへそ・おへそからつま先までの長さ。

ほかに日常にも黄金比が多く見られます。名刺、タバコの箱、新書、クレジットカードなどもその一例です。

テレビで2005年5月28日に放映された「世界一受けたい授業」の中には，次のような間違いがある。

[1]　オウム貝

出演した著名な数学者の秋山仁が持っているのは「オウムガイ」であり，これは貝ではなく，頭足類(イカやタコの仲間)である。流石に画面のテロップは正しく表記されているが，Web上では間違っている。この間違いは非常に多い。

[2]　オウムガイに黄金比が潜んでいる

オウムガイを2つに割ると，綺麗な螺旋を見ることができる。この螺旋は，対数螺旋と言われるものであり，極方程式で，

$$r = ae^{\theta \cot b} \quad \cdots (*)$$

と表される。

このオウムガイの螺旋に黄金比が現れるという意味は，

縦：横＝1：1.618

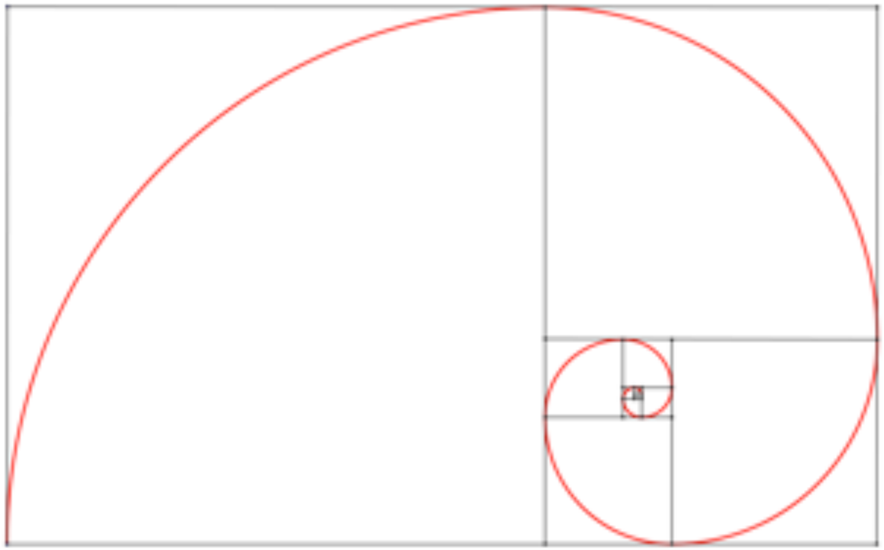
となる長方形(黄金矩形)によってできる螺旋(これも対数螺旋である)が，オウムガイの螺旋になっているということである。本当かどうか調べてみると…

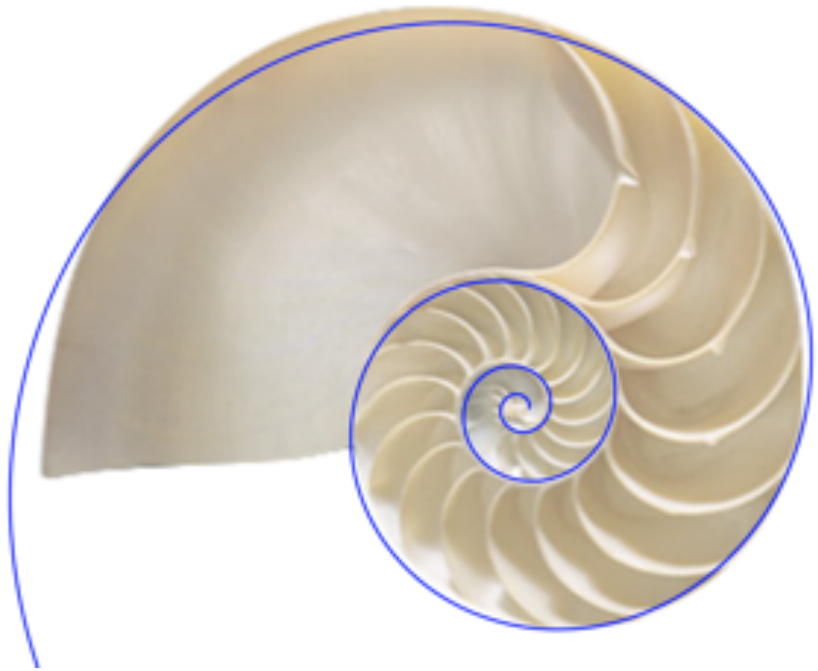
GeoGebraでシミュレーション

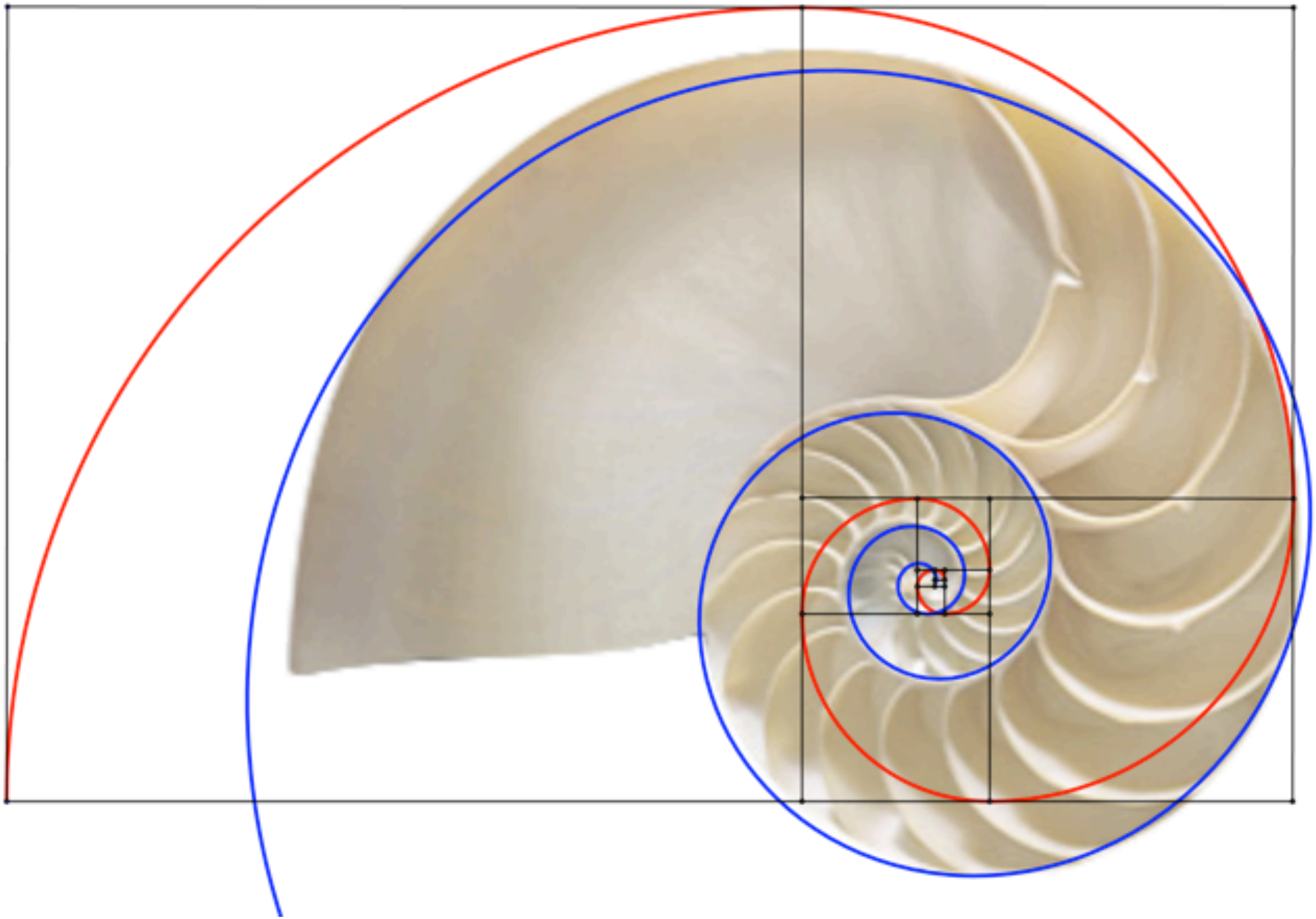
Core of STEMのWebから,

■オウムガイと螺旋

をダウンロードして，実験しよう。







違っている！
実際に，対数螺旋(*)におけるbの値は，
　　黄金矩形の螺旋：72.8°，オウムガイの螺旋：79°～80°
となって，黄金矩形による螺旋ではない，すなわち，オウムガイには黄金比は潜んでいないのである。このオウムガイと黄金比の関係は，都市伝説のように流布されているが，数学できちんと判断すれば間違っていることがわかる。

[3]　名刺のサイズは黄金比
日本の名刺のサイズは，
　　55mm×91mm，55：91＝1：1.65454545
であり，黄金比とはちょっと違うのではないか。小数点第1位までは同じだけれど･･･これも都市伝説かな。

[4]　パルテノン神殿は黄金比？

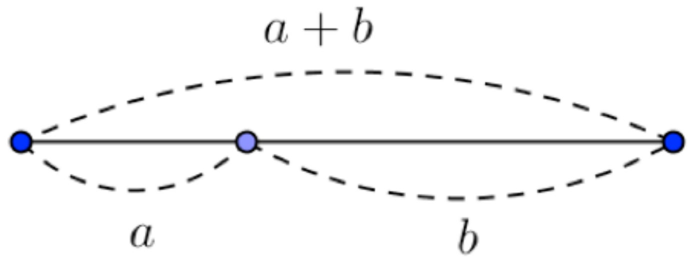
2．黄金比とは？

［定義 2］黄金比

線分を a，b の長さで 2 つに分割するとき，

$$\mathrm{a} : \mathrm{b} = \mathrm{b} : (\mathrm{a}+\mathrm{b})$$

が成り立つように分割したときの比 a：b を黄金比という。



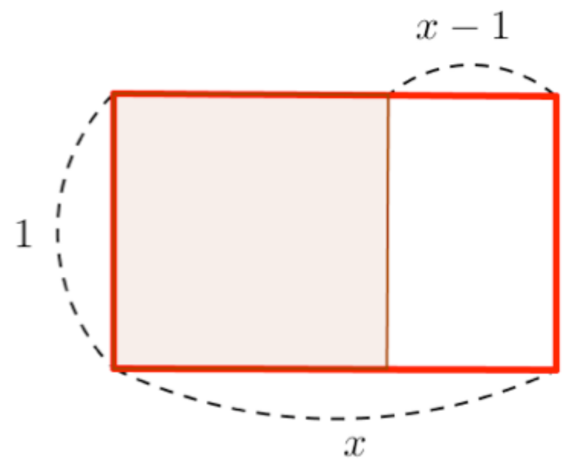
次に，黄金矩形と呼ばれる長方形で定義すると，次のようになる。

［定義 3］黄金比(黄金矩形)

x＞1 のとき，

(縦の長さ)：(横の長さ)＝1：**x**

の長方形から，右図のように正方形を取り去った残りの長方形が元の長方形と相似になるとき, **x** を黄金比(黄金数)という。
また，このような長方形を黄金矩形という。



［問9］ レポート

(1) $\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。

(2)　黄金数 $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が無理数であることを証明せよ。

パルテノン神殿は，B.C.447年に建設が始まり，B.C.438年に完工したとされる。

この時代の数学者としては，ピタゴラス(B.C.582〜B.C.496)がいる。ピタゴラスの定理(三平方の定理)で有名であるが，彼は新興宗教とでも言える「ピタゴラス教団」の教祖であった。

ピタゴラス教団の教義は,

「万物は数である」

という教えであったが，当時における数とは有理数のことであった。

有理数は分数で表せる数

言い換えるとある単位で計り切ることができる数である。そのような時代に，操作が無限に続く，無理数であるϕを利用してパルテノン神殿を建てたとは,とても思えない。

つまり，世の中のいろいろな所に黄金比が潜んでいるという話は，都市伝説であることが多いのである。

［問10］レポート　←　任意

黄金矩形と他の長方形を幾つか並べて見てもらったとき，どの長方形を美しく感じる人が多いか調査して考察してみよ。

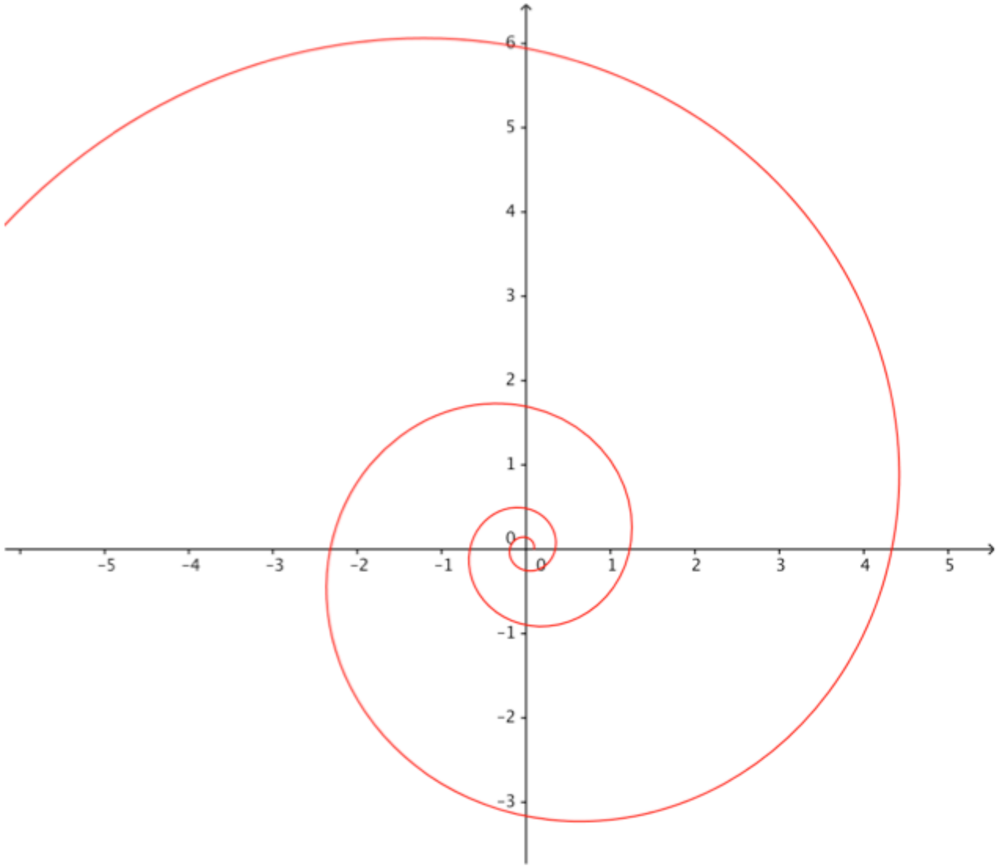
3. 螺旋とは？

黄金比のところで登場した**対数螺旋**は，次の極方程式で表される曲線である。

$$r = ae^{b\theta} \cdots (**)$$

(a，b は定数で，e は自然対数の底＝ネピア数)

例えば，a＝0.1，b＝0.2 のとき，対数螺旋(**)は，右図のような螺旋になる。a，b を変化させれば，また違う形になるように思えるが，自己相似形の曲線である。すなわち，任意の倍率で拡大した対数螺旋は，適当な回転によって元の螺旋と一致するという美しい性質を持っている。



また，対数螺旋は，極方程式の形を見ればこのような名前で呼ばれるのは当然であるが，一方で**等角螺旋**とも呼ばれる。

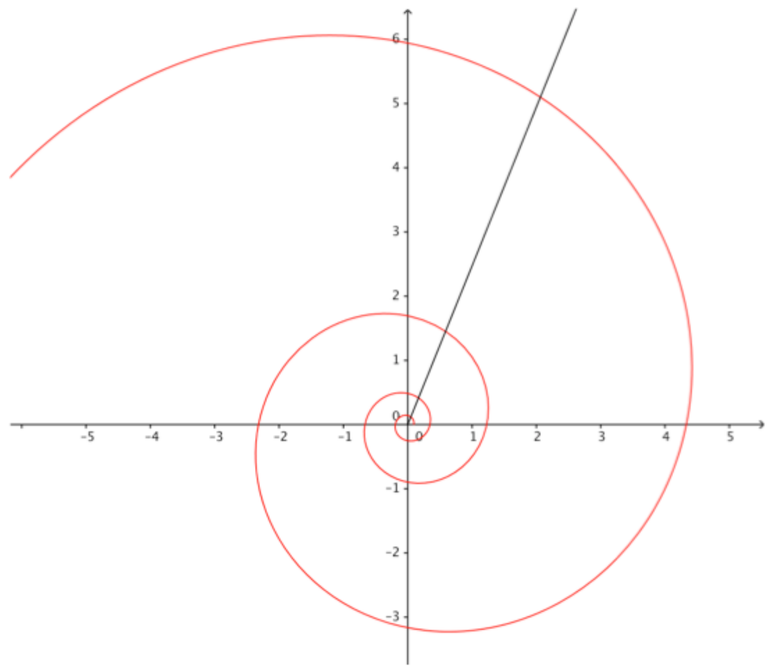
等角螺旋の名称は，中心から伸ばした半直線と対数螺旋のなす角が一定であることから。

極方程式(**)を，直交座標におけるパラメータ表示に書き換えると，

$$x = r\cos\theta = ae^{b\theta}\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = ae^{b\theta}\sin\theta$$

よって，



$$\frac{dx}{d\theta} = ae^{b\theta}(b\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = ae^{b\theta}(b\sin\theta + \cos\theta)$$

ゆえに，対数螺旋の点(x，y)における接線方向のベクトルを$\vec{u}$とおくと，

$$\vec{u} = (b\cos\theta - \sin\theta,\ b\sin\theta + \cos\theta)$$

また，半直線の方向ベクトルを$\vec{v}$とおくと，

$$\vec{v} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$$

よって，

$$|\vec{u}| = \sqrt{b^2+1},\quad |\vec{v}| = 1$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (b\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta + (b\sin\theta + \cos\theta)\sin\theta = b$$

ゆえに，半直線と対数螺旋のなす角をαとすると，

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} = \text{一定}$$

対数螺旋には，このような美しい性質が他にもある。

［問11］

対数螺旋 $r = ae^{b\theta}$ と中心を通る半直線との交点のうち，隣り合う交点については，原点からの距離の比は一定であることを証明し，その一定の値を求めよ。

［問12］

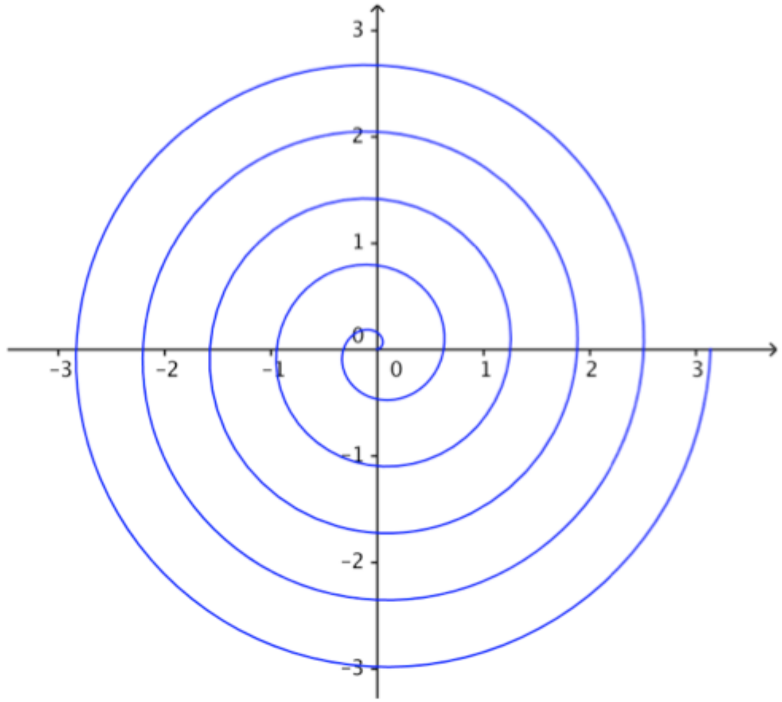
時速320kmもの猛烈な速さで飛ぶハヤブサが，獲物を狙って飛ぶときの飛行曲線は対数螺旋になると言われている。これは，ハヤブサの目は頭の横についているために，正面はよく見えないので，斜めから見て獲物を常に視野に収めて飛ぶからだそうだ。この説が正しいとすれば，ハヤブサの飛行曲線が対数螺旋になる理由を説明せよ。

螺旋には，極方程式

$$r = a\theta \cdots (☆) \quad (a\text{ は定数})$$

で表される螺旋もあり，これを**アルキメデスの螺旋**という。

例えば，$a = 0.1$ のときのアルキメデスの螺旋は，右図のようになる。



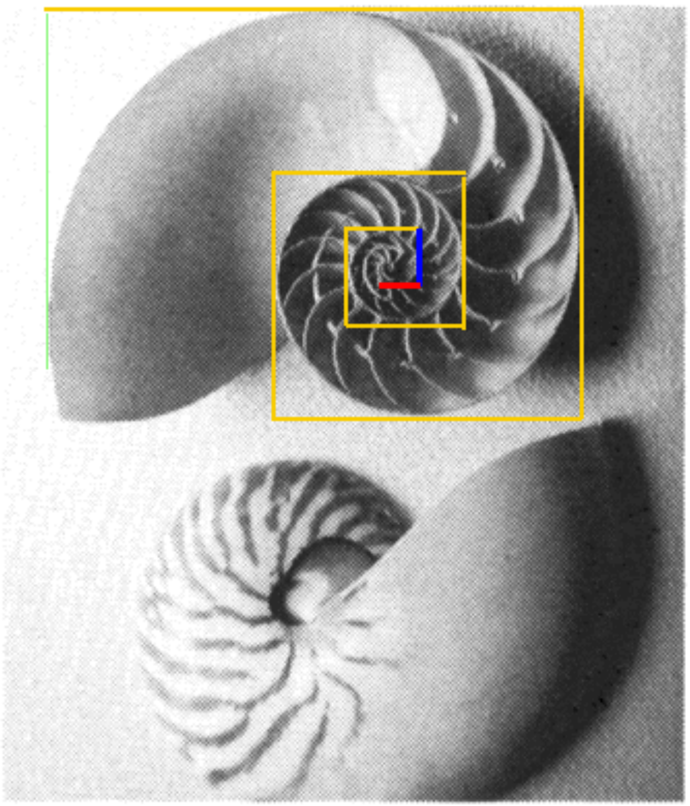
［問 13］

アルキメデスの螺旋(☆)と中心を通る半直線との交点のうち，隣り合う交点については，原点からの距離の差は一定であることを証明し，その一定の値を求めよ。

スイスの数学者・科学者ヤコブ・ベルヌーイ(1654～1705)は，対数螺旋について研究し，その美しい性質に魅了されたので，墓石に対数螺旋を彫ってもらうことを望んだ。しかし，実際には誤ってアルキメデスの螺旋が彫られてしまった･･･

怪しげな解説

ネットや本などで，黄金比に関して怪しげな説をとなえているものがある。
例えば，次のようなWebページがある。注意しよう！



人間が発見し、美しい比と感じた黄金比ですが、実は、ひまわりの種の数（右回りと左回り）、松ぼっくりのかさ、オウム貝の対数螺旋など自然界に多く存在しているのです。人間が誕生する遙か以前から地球上に存在していた黄金比。人間が黄金比を綺麗だと感じるのは、もしかすると地球生物としての本能なのかも知れません。ここに、黄金比が別名「神の比」と呼ばれる所以がありそうです。

［課題15］

等角螺旋は，オウムガイのような軟体動物の殻の断面や，動物の角の形によく現れる。その理由について考察せよ。

巻き貝のシミュレーション