科学の言語としての数学

自然の中の数学 4

2017年10月31日(火)　10：40～12：10

吉田信也(全学共通)

4. フィボナッチ数列とは？

数学は，科学の言語として自然現象等を解明・説明するのに，大いに役立つ。しかし，前節で少し見たように，何でもかんでも数学のせいにする，数学って凄いだろう，的な理解は間違っている。

黄金比の他にもそのような例として，**フィボナッチ数列（フィボナッチ数）**がある。

［定義 4］フィボナッチ数列

次の漸化式で定義される数列をフィボナッチ数列といい，各項の数をフィボナッチ数という。

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

具体的にフィボナッチ数を求めてみると，次のようになる。

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，・・・

フィボナッチ(1170 頃～1250 頃)は，本名をレオナルド・ダ・ピサ(ピサのレオナルド)といい，フィボナッチは「ボナッチの息子」という意味である。フィボナッチは，1202 年に『算盤の書』を発行し，その中でウサギのつがいが増えていく問題を作ったが，そこにフィボナッチ数列が現れたのである。

[課題16]

フィボナッチ数列の一般項を求めよ。また，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ を求めよ。

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \cdots ①$$

において，

$$x^2=x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-1=0$$

の 2 つの解を α，$\beta\,(\alpha>\beta)$とすると，

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-1 \quad \left(\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

であるから，①より，

$$F_{n+2}-\alpha F_{n+1}=\beta(F_{n+1}-\alpha F_n)$$

よって，

$$F_{n+1}-\alpha F_n=(F_2-\alpha F_1)\beta^{n-1}=\beta^n \cdots ②$$

同様にして，

$$F_{n+1}-\beta F_n=(F_2-\beta F_1)\alpha^{n-1}=\alpha^n \cdots ③$$

③−②より，

$$(\alpha-\beta)F_n=\alpha^n-\beta^n$$

ゆえに，

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \cdots ④$$

［課題16］

フィボナッチ数列の一般項を求めよ。また，$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$ を求めよ。

また，

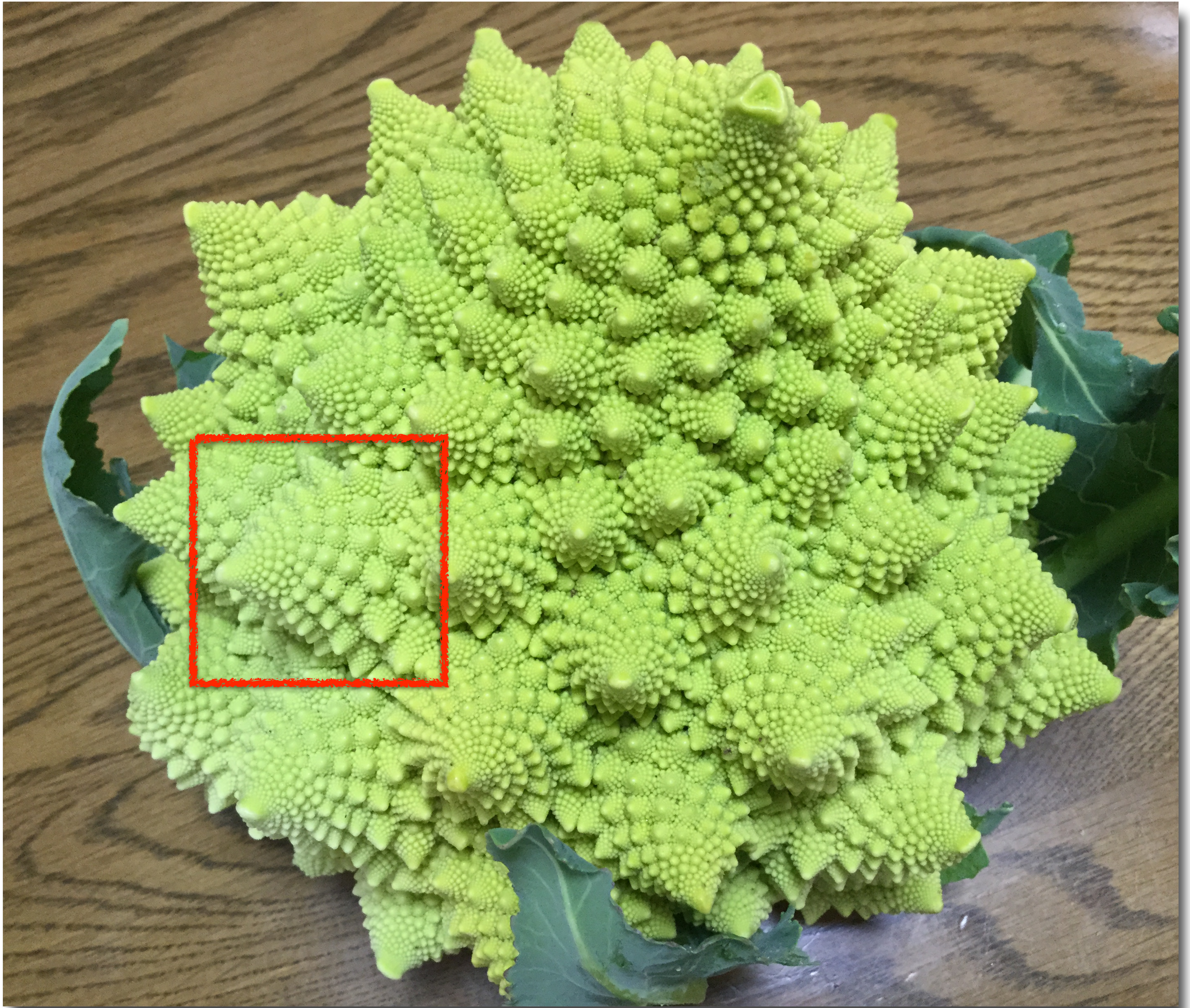
$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad\left(\because\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1\right)$$

さて，フィボナッチ数列の一般項④は，無理数の n 乗の数で表されているが，計算の結果出てくる各項は整数である。ちょっと不思議な感じがする。

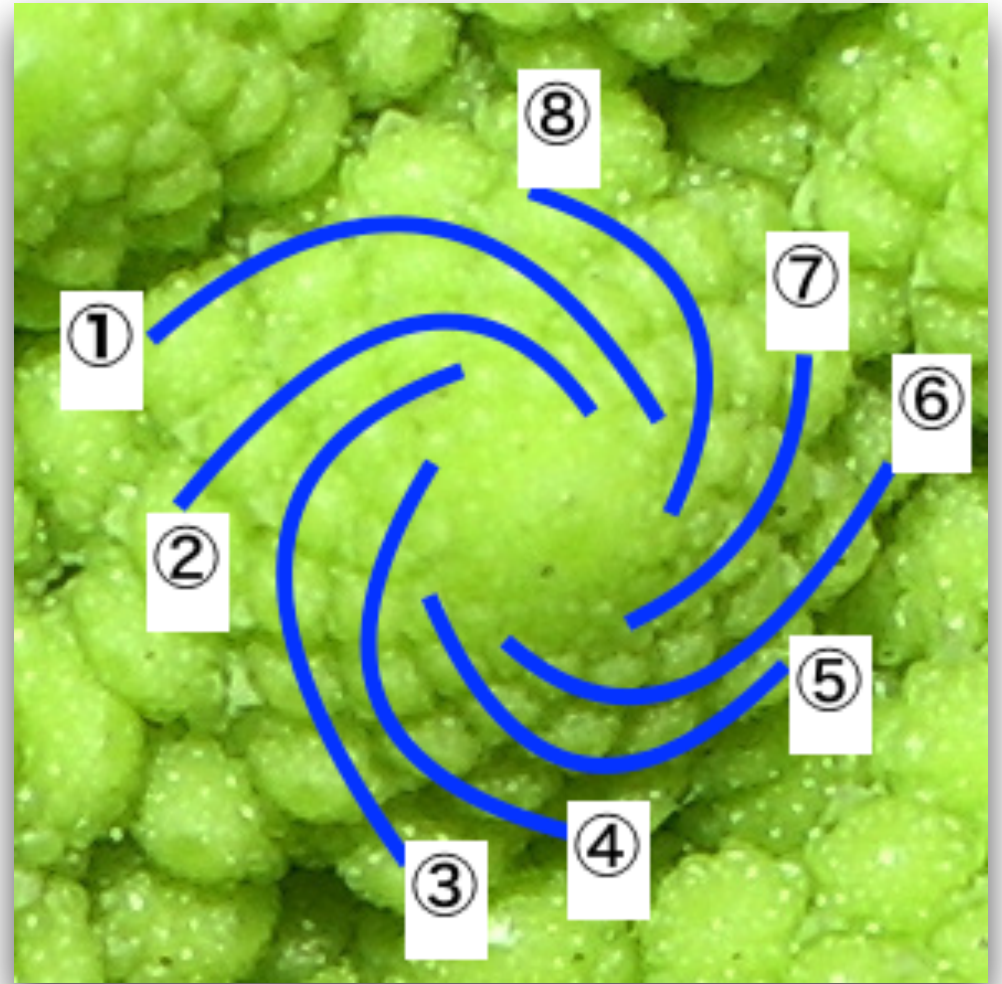
また，フィボナッチ数列の隣り合った項の比は，黄金数 φ に収束する！この結果もあって，次節で見るようにフィボナッチ数を特別な数とみなす「風潮」がある。

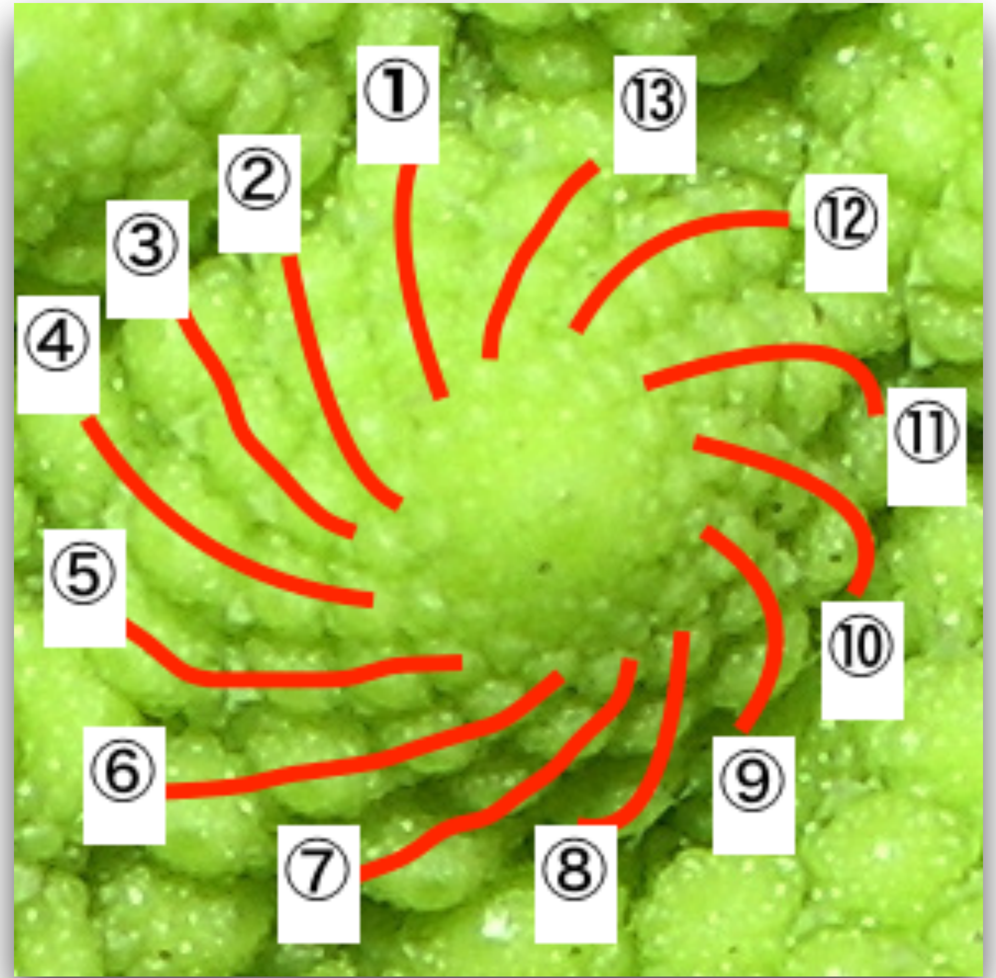
5. フィボナッチと螺旋と葉序の関係は？

- 右の野菜は，カリフラワーの仲間のロマネスコ
- ロマネスコは，見ての通りフラクタル構造(自己相似構造)がはっきりと見える，美しい野菜



- これだけでも，数学的に素晴らしい野菜であるが，その一部を拡大すると，今度は右回りと左回りの螺旋がくっきりと見えてくる
- またまた数学的な構造を持っているというわけだ。
- その本数を数えると，8本と13本となる
- なんと，これは，隣り合ったフィボナッチ数ではないか！





- 一般に，花の花弁の数は3，5，8が多いと言われ，これらもすべてフィボナッチ数である
- また，パイナップルや松ぼっくりなどは螺旋を数えられる実を持つが，これらの螺旋の数もほとんど5，8，13だと言われる
- 自然は，フィボナッチ数に支配されているのか？

［課題17］

植物の80%では，茎についた葉の列は螺旋を描く。葉はそれぞれすぐ下の葉と一定の角度だけずれた所についている。このずれる角度は，多くの種において概ね137.5°であることが多い。この角度は一体，どこから現れたのだろう？

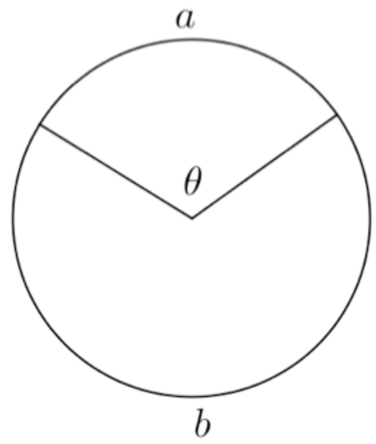
［課題 17］

植物の 80%では，茎についた葉の列は螺旋を描く。葉はそれぞれすぐ下の葉と一定の角度だけずれた所についている。このずれる角度は，多くの種において概ね 137.5° であることが多い。この角度は一体，どこから現れたのだろう？

定義 2 で，黄金比を線分の比で定義した。そのアナロジーで，円を分割する。すなわち，右図のように，

(短い円弧)：(長い円弧)＝(長い円弧)：(円周)

を満たすように分割したときの，短い円弧に対する中心角を θ とすると，



$$a : b = b : (a+b)$$

これはどこかで見たような･･･，そう，黄金分割である。ゆえに，

$$a : b = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

より，

$$\theta = 360^\circ \times \frac{1}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 360^\circ \times \frac{2}{3+\sqrt{5}} = 137.5077\cdots^\circ$$

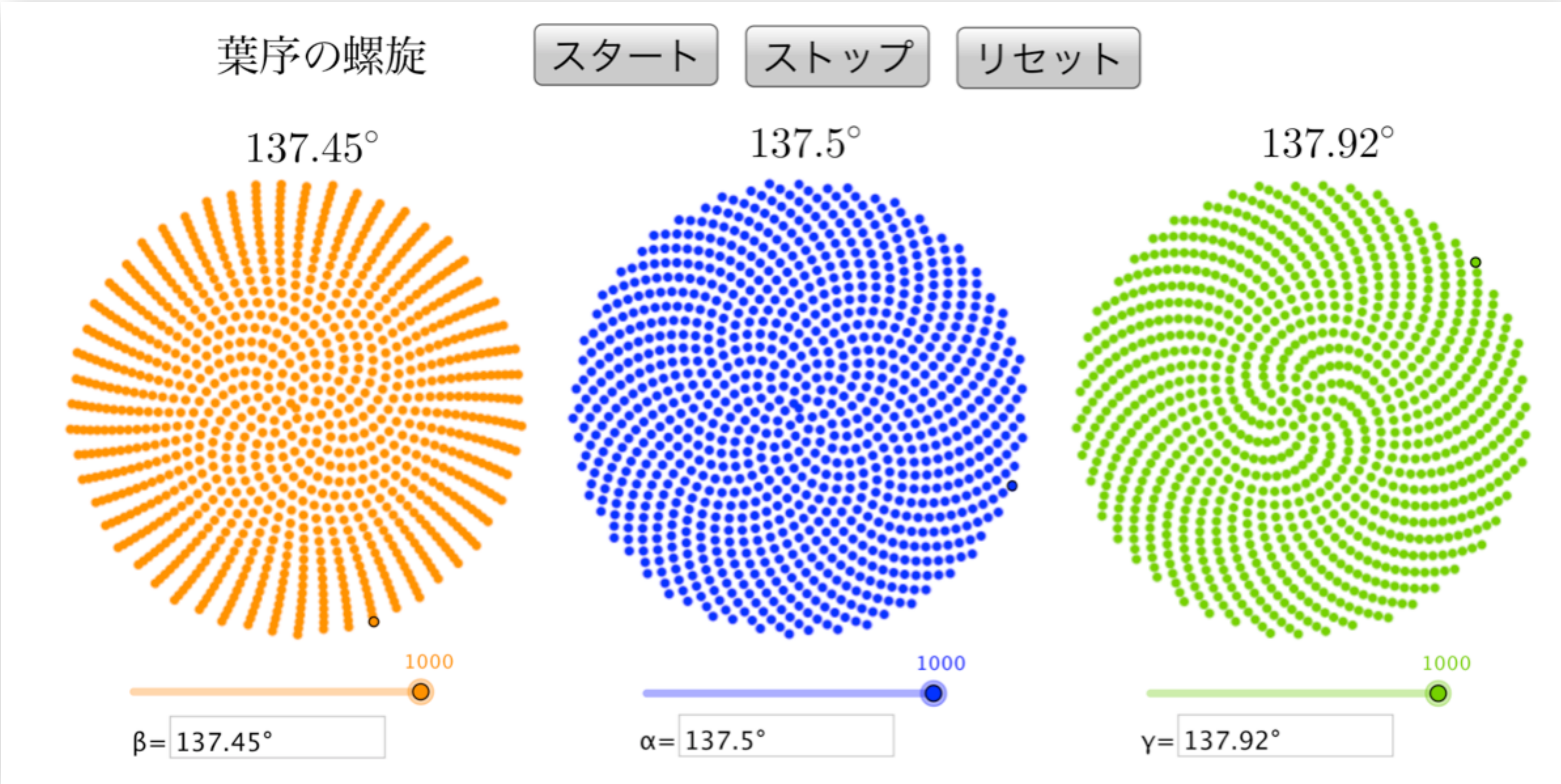
と，137.5° が現れる。この中心角 $\theta = 137.5^\circ$ を，**黄金角**という。

またまた現れた黄金比，そして黄金比に分割された黄金角，これは本当に特別な角度なのだろうか？

［課題18］

WebのGeoGebraのファイル「葉序のシミュレーション」を利用して，葉序や小花の詰め込みと黄金角について考察せよ。

シミュレーションの結果は，次のようになり，黄金角の「神秘性」「偉大さ」が確認できたように思えるが・・・



本当に理解できた？

- 多くの本やネット上では
  「以上のようなことから，フィボナッチ数・黄金角の葉序は植物に有利であり，進化の過程でそれを選択した植物が生き残ったのである。なんと素晴らしい！」
  と解説してある
- そして，それを読んで
  「凄い！　自然は素晴らしい！」
  と感激，納得するのである･･･
- しかし，これで本当に理解できたのだろうか？

本当に理解できた？

確かに黄金角であれば，葉序は植物に有利そうだ
しかし，その中途半端な137.5077･･･°を決める原理は何なのだ？
隣り合った葉の原基(葉になる細胞)が，なぜ黄金角だけずれるのか？
それは少しも説明できていないではないか！

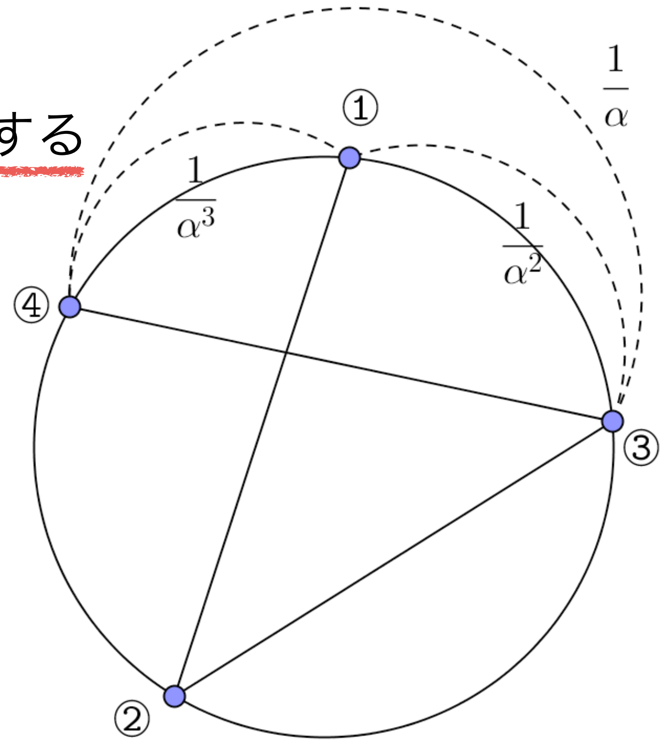
- ということで，もっと科学的な説明・解明が必要なのである
- 数学的な操作はしているが，自分の思い込みや思い入れで，自然の中に現れる黄金比，フィボナッチ数を賞賛するのでは，数学を科学の言語として理解しているとは言えない

近藤滋先生(大阪大学)の仮説

- 葉序については，大阪大学の近藤滋先生が，次のような概略の仮説を唱えられている
- まず，葉の原基の形成には，一定濃度以上のオーキシンという植物ホルモンが必要である
- 古い原基はオーキシンを吸収する(阻害的に働く)ので，新しい原基は古い原基からできるだけ遠くにできる
- そこで，次の2つの仮定を立てる。

  [1]　1つ前の原基の阻害効果は，一定の比率で減衰する
  (ただし，4個以上古いものは無視する)

  [2]　原基からの阻害効果は，距離に反比例する
- 以上を図示すると，右図のようになる。
  ここで，αは減衰率である。



[問14]

近藤先生の仮説に従えば，$\alpha = \phi$となることを示せ。

思うこと

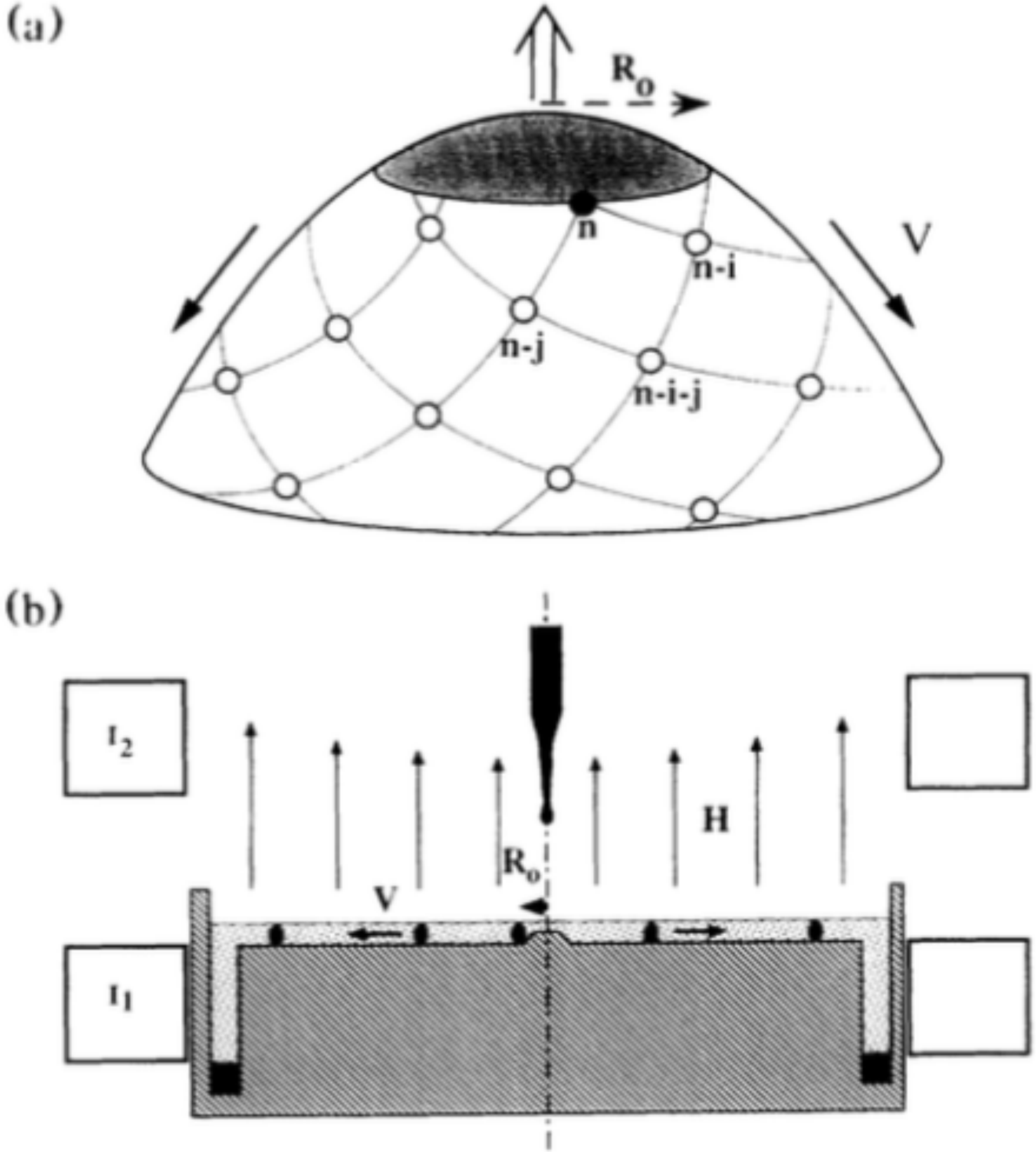
- 黄金比，フィボナッチ数列は凄い！　自然は凄い，と感激するだけで終わるのではなく
- なぜ黄金比が，フィボナッチ数列が現れるのか？　その仕組は？と問いを立てられる生徒・学生になってほしい

思うこと

- 例えば「本当にフィボナッチ数は特別なのか？」
  - ・1〜21までの数の中で，フィボナッチ数でもその倍数でもない数は4個のみ(7，11，17，19)
  - ・つまり，フィボナッチ数がいたるところで見られるわけだ･･･
- 例えば「$\{a_n\}$：1，4，5，9，14，23，･･･なる数列も隣接2項の比は黄金比ϕに収束する！」
  - ・ $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ の関係(フィボナッチ・プロセス)がϕを生む

発展的に

- 葉序に関する，数学的・科学的な教材の研究と開発
- 参考例：S. Douady， Y. Couder 『Phyllotaxis as a Physical Self-Organized Growth Process』(1992年)
  - 油膜で覆った円盤に，磁気を帯びた液滴を等時間の間隔で落下させせ，装置全体にも磁場をかける
  - 液滴は斥けあいながら，円の半径に沿って外側に移動する
  - 以上を，実験とコンピュタシミュレーションの両方で実施



- S. Douady， Y. Couder
  『Phyllotaxis as a Physical Self-Organized Growth Process』(1992年)

発展的に

- Mathematicaのシミュレーションの仮定

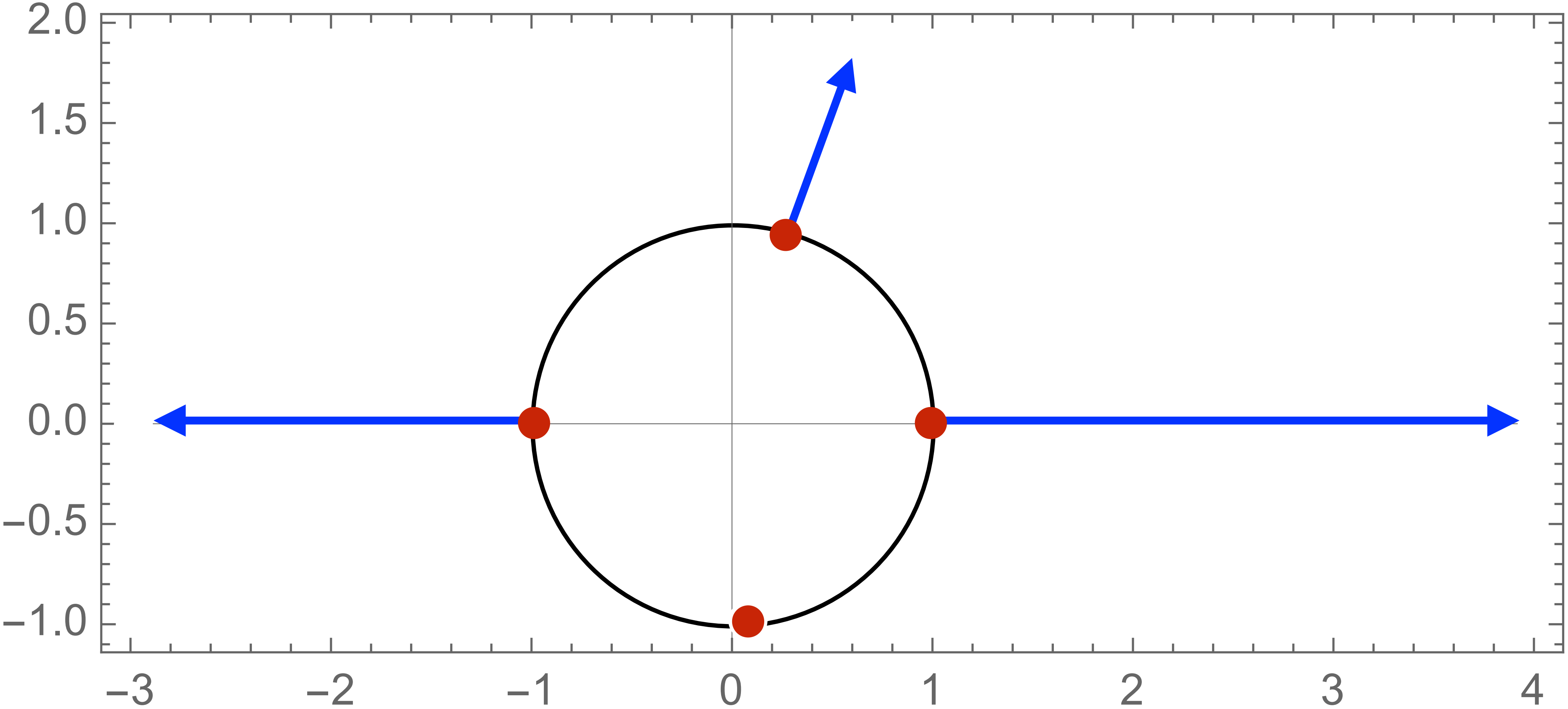
(1) 原基は，平面上の半径Rの円周上のどこかに発生する

(2) 原基は時間Tごとに新たに発生し，発生後は円の法線(半径)方向の外側に速度Vで移動する

(3) 発生する原基の位置Xは，直近の3つの原基の位置A，B，Cに影響される

(4) XはA，B，Cからの影響が，いちばん少ない位置である

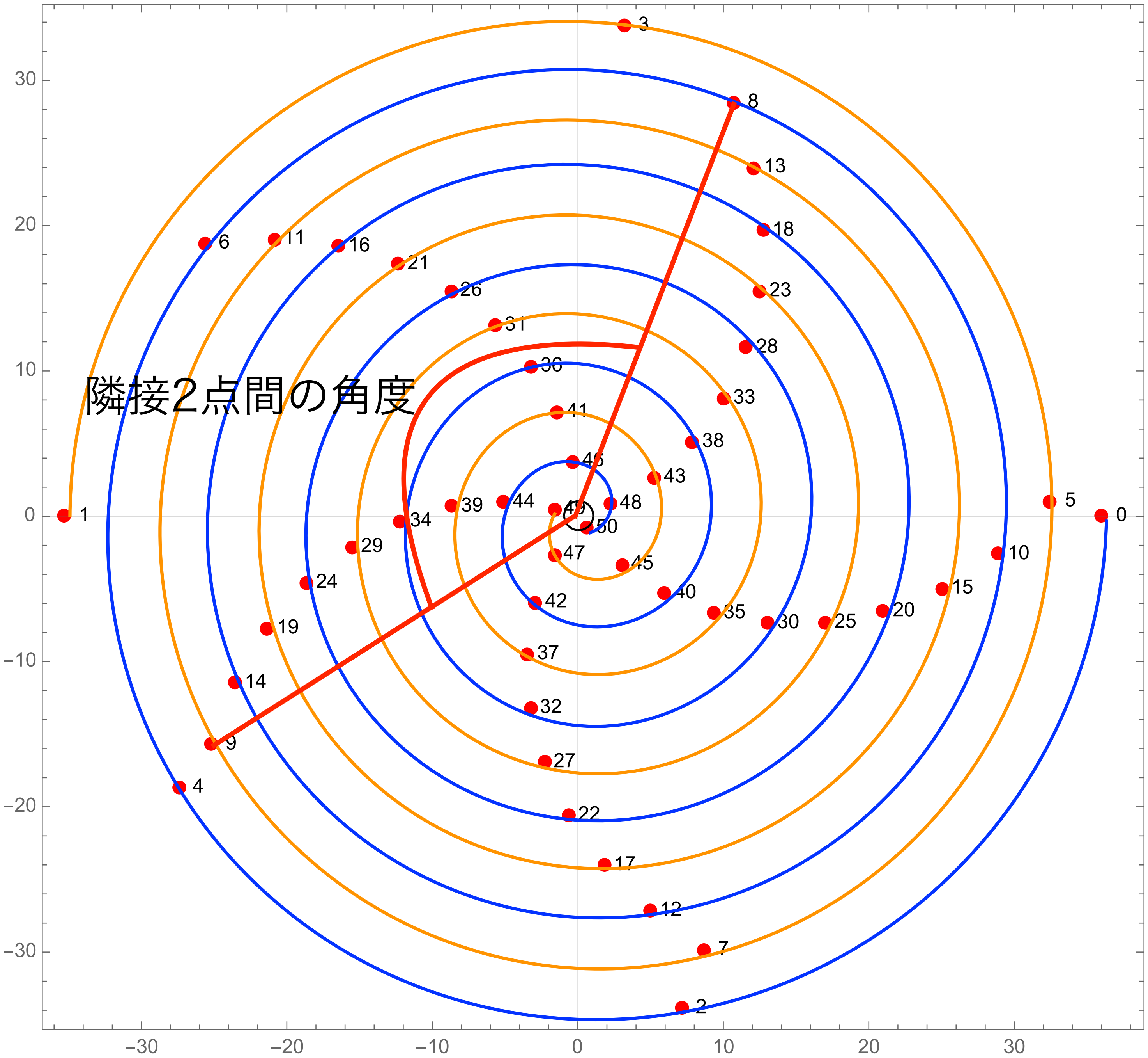
仮定(1)，(2)，(3)の具体例



発展的に

- 仮定の(4)を具体的実現するために，次の3つのdを定義し，dが最小値をとる点をXとした
- $d=\frac{1}{XA}+\frac{1}{XB}+\frac{1}{XC}+\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}$
- $d=\frac{1}{XA^3}+\frac{1}{XB^3}+\frac{1}{XC^3}+\frac{1}{AB^3}+\frac{1}{AC^3}+\frac{1}{BC^3}$
- $d=e^{-10XA}+e^{-10XB}+e^{-10XC}+e^{-10AB}+e^{-10AC}+e^{-10BC}$

Mathematicaによるシミュレーション例



$$d=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{(2\text{点間の距離})}$$

$$G=VT/R=0.7$$

形はGによって決まる。

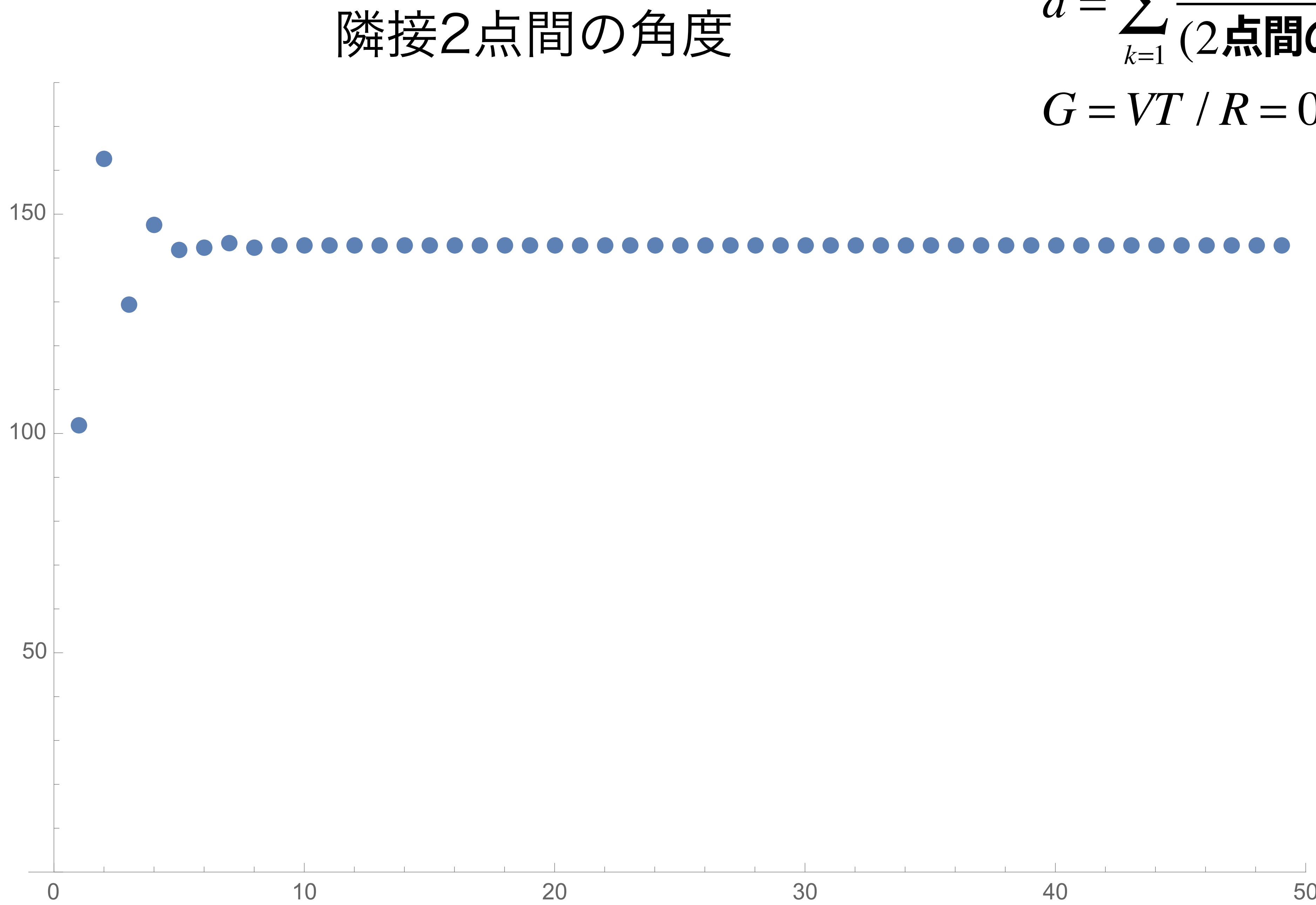
R=T=1として,

Vを変化させて実行。

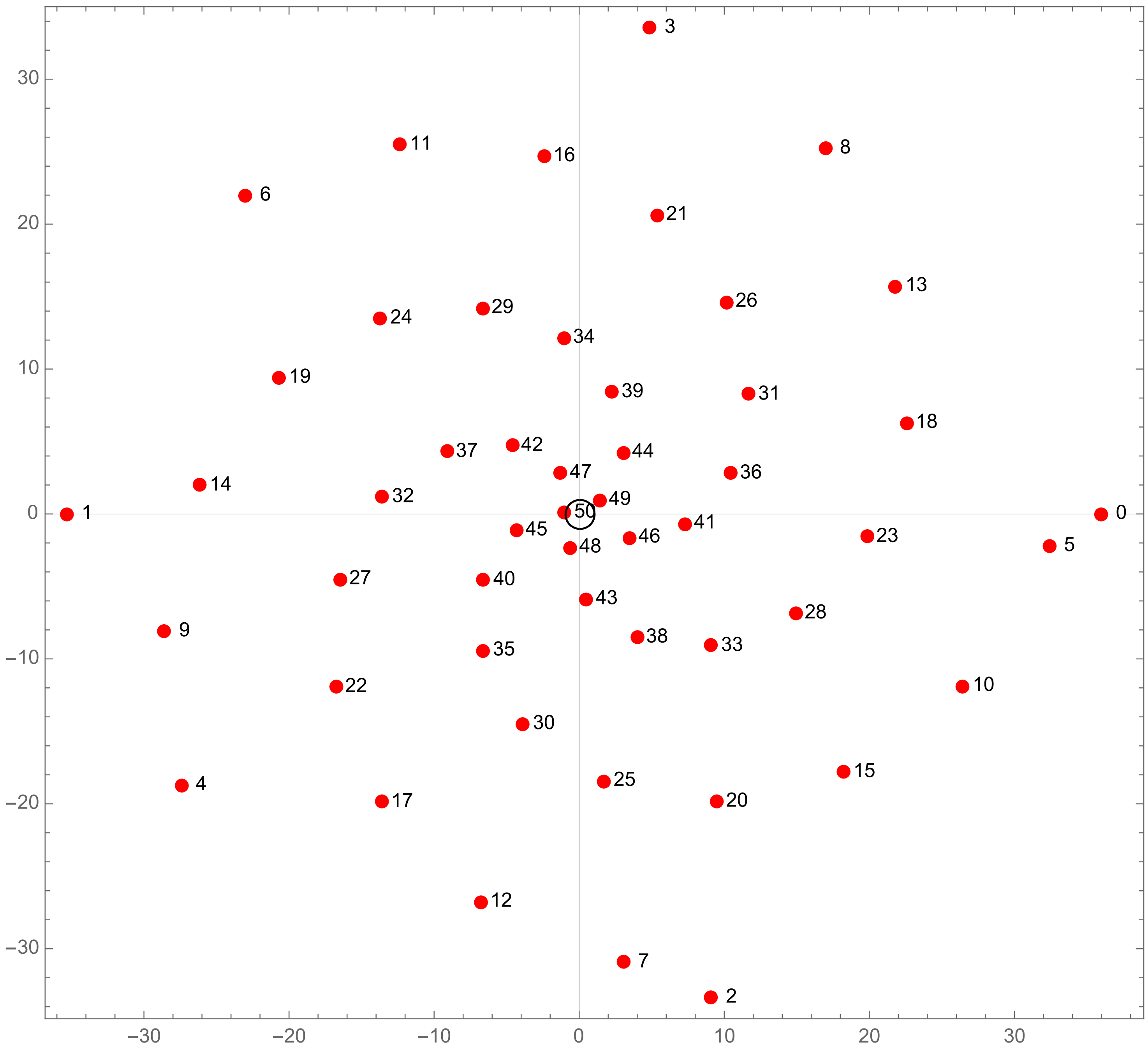
Mathematicaによるシミュレーション例

$$d=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{(2\text{点間の距離})}$$

$$G=VT/R=0.7$$



Mathematicaによるシミュレーション例



$$d = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{(2\text{点間の距離})^3}$$

$$G = VT / R = 0.7$$

形はGによって決まる。

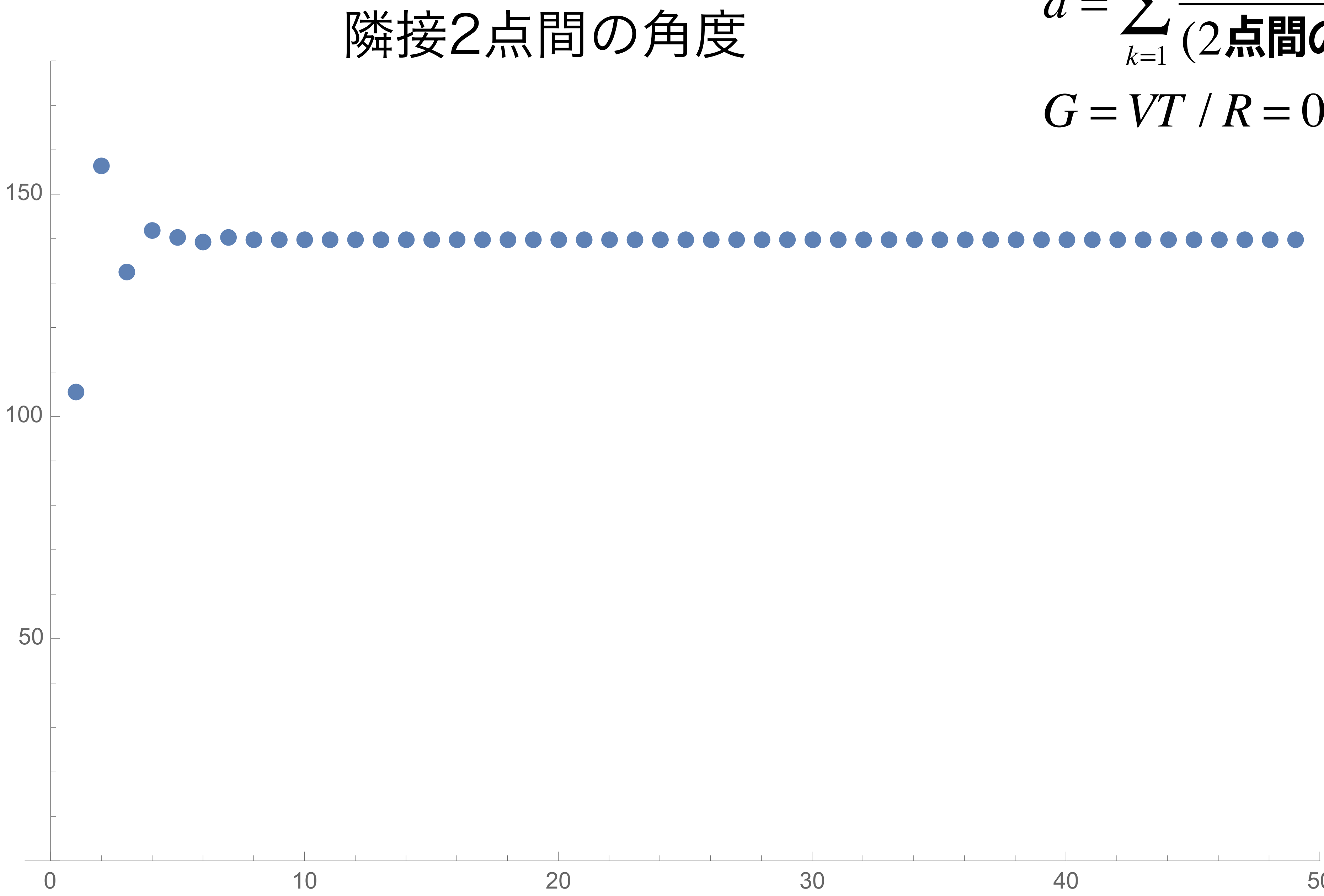
R＝T＝1として,

Vを変化させて実行。

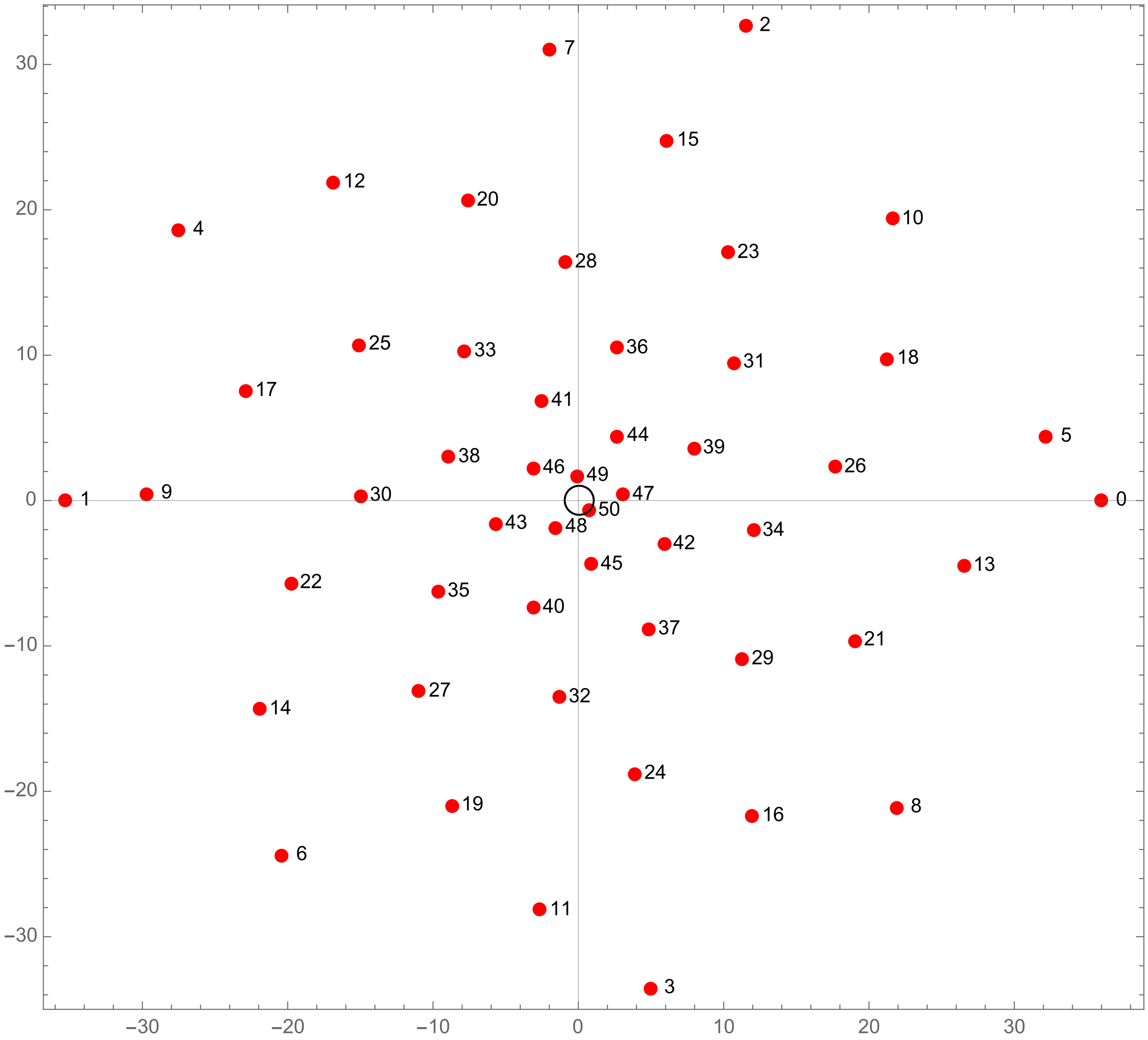
Mathematicaによるシミュレーション例

$$d = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{(2\textbf{点間の距離})^3}$$

$$G = VT / R = 0.7$$



Mathematicaによるシミュレーション例



$$d=\sum_{k=1}^{6} e^{-10(2\text{点間の距離})}$$

$$G=VT/R=0.7$$

形はGによって決まる。

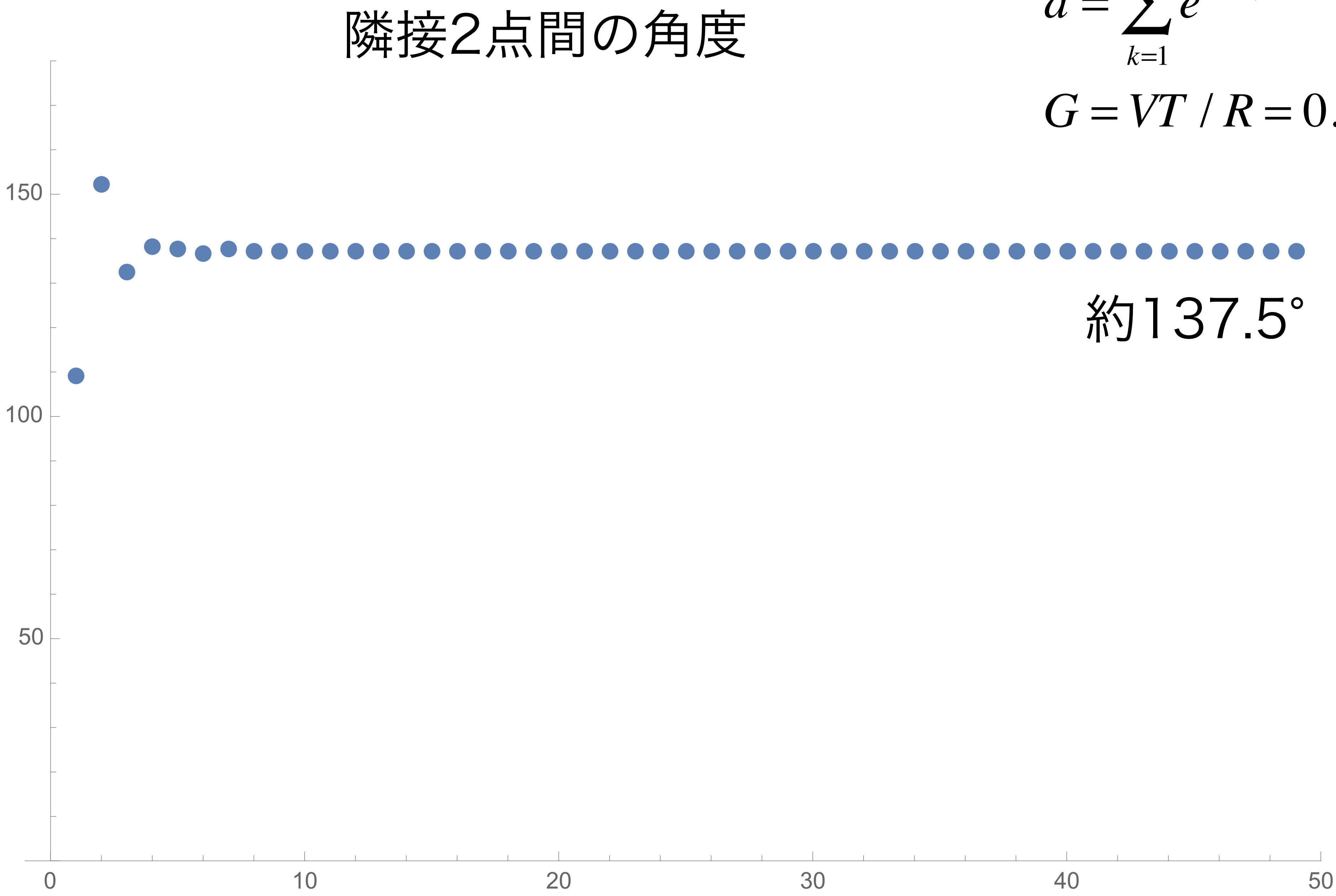
R=T=1として,

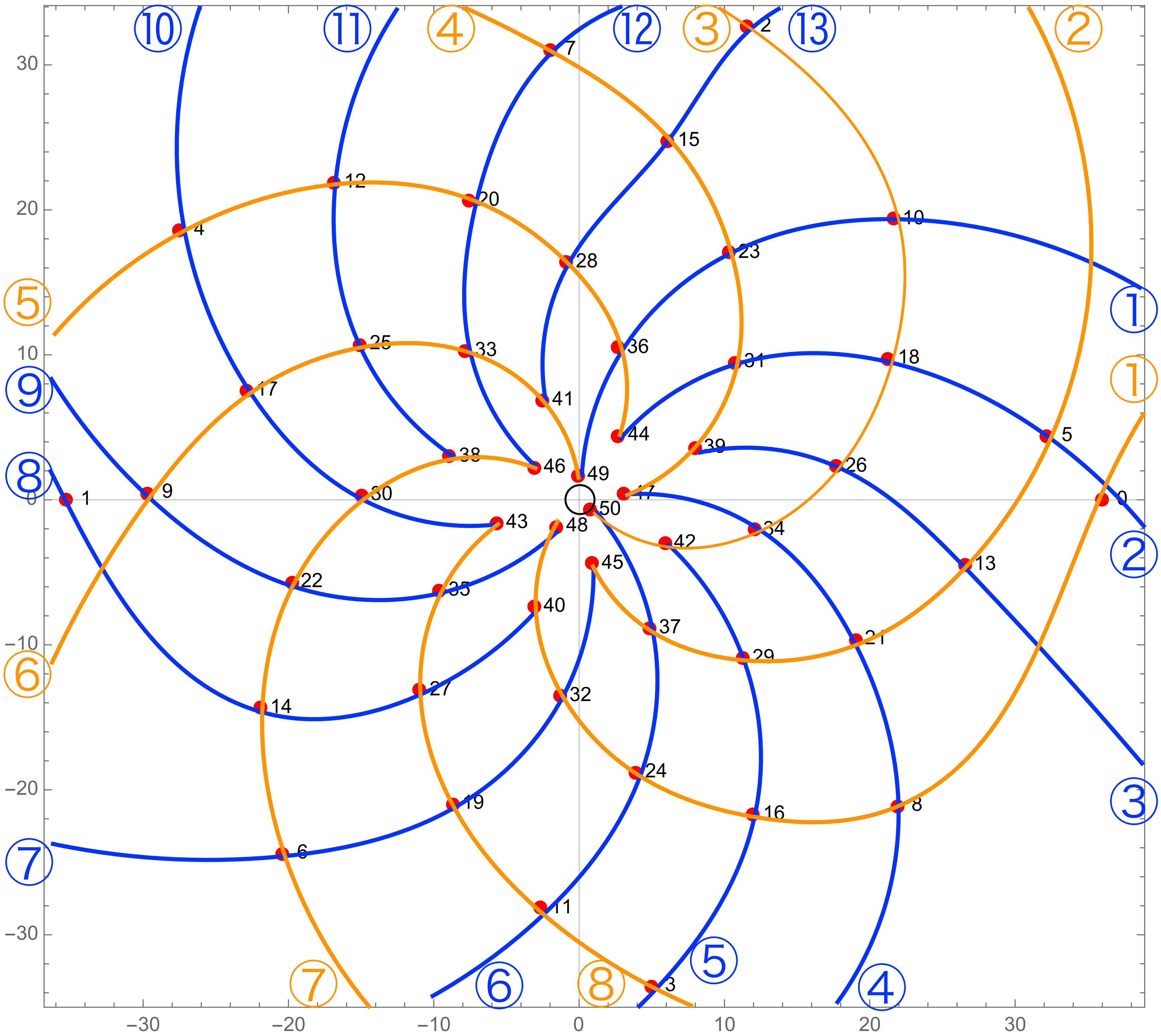
Vを変化させて実行。

Mathematicaによるシミュレーション例

$$d=\sum_{k=1}^{6}e^{-10(2\text{点間の距離})}$$

$$G=VT/R=0.7$$





30
20
10
0
−10
−20
−30
−30
−20
−10
0
10
20
30

レポート課題

1.［課題18］の黄金角137.5°以外に葉序に関して適した角度があるかを，GeoGebraを利用して実験し，その結果の画面コピー，またはGeoGebraファイル

2.［問14］の解答を書いたレポート用紙

- Z101の提出BOXに投入(ファイルであればメール添付)

3.Web上の「授業を受けて」のファイルをダウンロードして記入し，メール添付で提出

- メール：shinya@cc.nara-wu.ac.jp

- 締め切り：11月14日(火)17時